

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Красноярский государственный технический университет

А. С. Глинченко

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

*Рекомендовано Сибирским региональным учебно-методическим центром
высшего профессионального образования
в качестве учебного пособия*

Красноярск 2001

УДК 621.391.083.92(07)

Рецензенты:

А.И. Кондрашев, канд. физ.-мат. наук, доцент КГУ;

В.В. Югай, технический директор ГУ НПП “Радиосвязь”

Глинченко А.С. Цифровая обработка сигналов: В 2 ч.
Ч. 1. Красноярск: Изд-во КГТУ. 2001. 199 с.

Рассмотрены общие принципы и математические модели преобразования сигналов при цифровой обработке, базовые алгоритмы цифровой фильтрации сигналов, методы синтеза, программной реализации и моделирования цифровых фильтров, оценки и обеспечения их точности.

Предназначено для студентов вузов специальностей 200700 (“Радиотехника”), 201300 (“Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования”), 201500 (“Бытовая радиоэлектронная аппаратура”), 190100 (“Приборостроение”), 071500 (“Радиофизика и электроника”), а также специализаций в рамках указанных специальностей.

Печатается по решению редакционно-издательского совета университета.

ВВЕДЕНИЕ

Цифровая обработка сигналов (ЦОС) относится к одному из наиболее динамично развиваемых и перспективных направлений современной радиотехники и смежных с нею областей.

Ее возможности далеко не исчерпаны как в алгоритмическом, так и в техническом отношении. Последнее обусловлено интенсивным развитием элементной базы ЦОС: ростом степени интеграции, функциональной сложности и быстродействия цифровых БИС и СБИС; созданием новых физических принципов обработки, включая оптические, акусто-электронные и др.

Цифровая обработка сигналов является альтернативой традиционной аналоговой. К ее важнейшим качественным преимуществам относятся: реализуемость любых сколь угодно сложных (оптимальных) алгоритмов обработки с гарантированной и независимой от дестабилизирующих факторов точностью; программируемость и функциональная гибкость; возможность адаптации к обрабатываемым сигналам; технологичность.

Применение ЦОС ограничено в некоторых случаях недостаточной скоростью обработки. Однако непрерывное повышение быстродействия вычислительных средств, уже сейчас достигшее значений тактовой частоты 1000 МГц и более, в значительной мере разрешает эту проблему. Поэтому для современных сложных систем характерно сочетание аналоговой и цифровой обработки при максимальном и все возрастающем удельном весе последней (тенденция приближения ЦОС к антенне).

Физически система ЦОС представляет собой **процессор**, который в соответствии с заданным **алгоритмом** под управлением **программы** осуществляет вычислительные операции с **цифровыми сигналами**, т. е. последовательностями цифровых кодов, соответствующих, например, отсчетам цифрового измерителя (датчика) или оцифрованного аналогового сигнала. Процессоры ЦОС наиболее полно используют новейшие достижения микроэлектроники и стимулируют ее развитие. Они реализуются разными средствами: на основе быстродействующей жесткой логики, программируемых логических схем (ПЛИС), микропроцессоров общего назначения, персональных и встраиваемых одноплатных компьютеров и цифровых сигнальных процессоров (ЦСП). Последние архитектурно и программно оптимизированы на задачи ЦОС и образуют ее специализированную элементную базу. Наиболее популярными являются семейства ЦСП ADSP-21xx, ADSP-21xxx фирмы Analog Devices, TMS320Cxx фирмы Texas Instruments, DSP56xxx, DSP96xxx фирмы Motorola. Длительность командного цикла их составляет (30–100) нс и менее. Имеются отдельные ЦСП со встроенными аналого-цифровыми и цифро-аналоговыми преобразователями. Важная роль в цифровой обработке принадлежит также

современным средствам автоматизации проектирования аппаратного и программного обеспечения процессоров ЦОС.

Алгоритмические и реализационные вопросы ЦОС разделяются условно на базовые, или общие, и прикладные. Прикладные задачи, ориентированные на конкретные приложения, являются предметом изучения специальных дисциплин.

К вопросам, определяющим содержание базовой подготовки в области ЦОС, можно отнести:

- сигналы, имеющие место при цифровой обработке, и их преобразования;
- алгоритмы цифровой фильтрации сигналов;
- методы синтеза цифровых фильтров;
- влияние конечной разрядности чисел в системах ЦОС;
- алгоритмы быстрого преобразования Фурье;
- методы спектрального и корреляционного анализа;
- методы переноса и преобразования спектров;
- методы передискретизации сигналов;
- методы многоканальной обработки сигналов;
- методы и средства реализации ЦОС.

Учитывая широкие области применения ЦОС, вопросы эти с некоторыми вариациями вошли в программы обучения специалистов различного профиля в рамках сформировавшейся в последние годы самостоятельной учебной дисциплины “Цифровая обработка сигналов”. Они в значительной мере

составляют содержание данного учебного пособия, которое предназначено для ее информационно-методического обеспечения. Оно создано на основе обобщения и развития ранее изданных учебно-методических разработок автора по цифровой обработке сигналов [21–23, 25, 46, 47] и многолетнего опыта преподавания дисциплины “Цифровая обработка сигналов” на кафедре радиотехники КГТУ.

Первая часть учебного пособия включает шесть глав. В первой главе рассмотрены преобразования аналоговой и цифровой форм сигналов и условия математической адекватности дискретного и цифрового сигналов, во второй – алгоритмы цифровой фильтрации на основе разностных уравнений и дискретной временной свертки и математические описания соответствующих им рекурсивных и нерекурсивных цифровых фильтров, в третьей – основные методы синтеза передаточной функции цифровых фильтров по заданной частотной характеристике, в четвертой – методы оценки и обеспечения точности ЦОС, в пятой – алгоритмы цифровой фильтрации на основе дискретного преобразования Фурье и частотной выборки, в шестой – примеры специальных задач и применений цифровых фильтров.

Данное пособие рекомендуется студентам, обучающимся в области радиотехники, радиофизики, радиоэлектроники, телекоммуникаций,

приборостроения, автоматике и управления, вычислительной техники, а также может быть использовано специалистами, разрабатывающими или применяющими системы с цифровой обработкой сигналов.

1. СИГНАЛЫ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ

1.1. Общая структура системы цифровой обработки аналоговых сигналов

Системы ЦОС непосредственно оперируют с последовательностями цифровых кодов, которые называют **цифровыми сигналами**. Такие сигналы обрабатываются **процессором ЦОС**, представляющим операционное или вычислительное ядро системы. Алгоритмическая обработка **аналоговых сигналов** цифровыми средствами предполагает их предварительное преобразование в цифровую форму, а в системах с аналоговым выходом – и из цифровой формы в аналоговую. Общей структурной схеме системы цифровой обработки аналоговых сигналов (рис. 1.1) отвечает цепочка функциональных преобразований сигнала вида: $A/A \Rightarrow A/C \Rightarrow C/C \Rightarrow C/A \Rightarrow A/A$ («аналог/аналог», «аналог/цифра», «цифра/цифра», «цифра/аналог», «аналог/аналог»), реализуемых соответственно аналоговым фильтром нижних частот ФНЧ1, аналого-цифровым преобразователем АЦП, процессором ЦОС, цифроаналоговым преобразователем ЦАП и аналоговым фильтром нижних частот ФНЧ2.

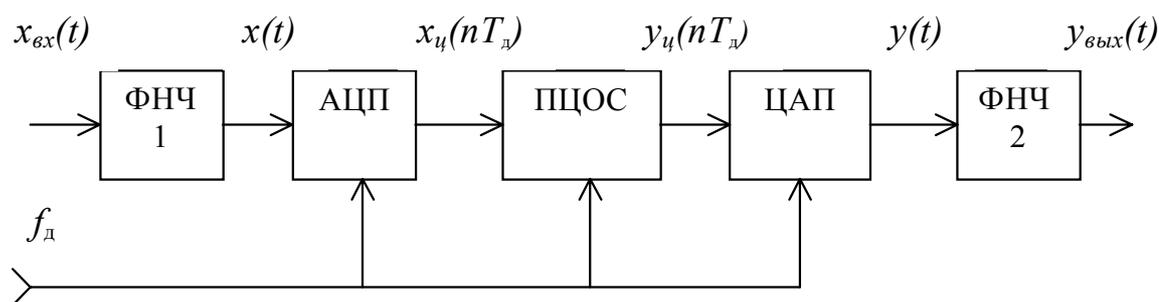


Рис. 1.1. Общая структура системы ЦОС

Входной сигнал системы ЦОС $x_{ex}(t)$ поступает на АЦП через аналоговый фильтр нижних частот ФНЧ1 с частотой среза ω_c . Фильтр ограничивает полосу частот входного сигнала (включая и сопутствующие ему шумы и помехи) максимальной частотой $\omega_m \approx \omega_c$, удовлетворяющей условию: $\omega_m < \omega_d/2$, где $\omega_d = 2\pi f_d$ – частота дискретизации сигнала. Он ослабляет искажения наложения при дискретизации сигналов с неограниченным по частоте спектром и называется **противомаскировочным**.

Аналого-цифровое преобразование включает дискретизацию сигнала по времени, квантование по уровню и цифровое кодирование (рис. 1.2).



Рис. 1.2. Последовательность операций аналого-цифрового преобразования сигнала

В результате образуются **дискретный сигнал** $x(nT_d)$, соответствующий выборкам аналогового сигнала $x(t)$ в дискретные равноотстоящие моменты времени nT_d , ($T_d = 1/f_d$ – период дискретизации сигнала), **дискретный квантованный сигнал** $x_{кв}(nT_d)$, отличающийся конечным множеством принимаемых им значений и **цифровой сигнал** $x_ц(nT_d)$ в виде последовательности цифровых двоичных кодов с числом разрядов, соответствующим разрядности АЦП. Процессором ЦОС в соответствии с заданным **алгоритмом цифровой обработки** (оператором Φ) входной цифровой сигнал $x_ц(nT_d)$ преобразуется в выходной цифровой сигнал системы $y_ц(nT_d) = \Phi[x_ц(nT_d)]$.

Аналоговый выходной сигнал системы $y_{вых}(t)$ получается (или восстанавливается) из цифрового сигнала $y_ц(nT_d)$ с помощью ЦАП, преобразующего его в **квантованный по уровню аналоговый сигнал** $\hat{y}(t)$ ступенчатой формы и аналогового ФНЧ2, которым ограничивается частотный спектр и подавляются высокочастотные компоненты выходного сигнала. Этот фильтр с частотой среза $\omega_c < \omega_d/2$ называют также **сглаживающим**.

Совокупность элементов ФНЧ1, АЦП, ЦАП и ФНЧ2 системы цифровой обработки аналоговых сигналов, выполняющих преобразования сигналов вида А/А, А/Ц и Ц/А, образуют **подсистему ее аналогового ввода-вывода** или **аналого-цифровой интерфейс**.

С преобразованиями сигналов при цифровой обработке связаны **искажения и погрешности**, которые зависят от параметров соответствующих преобразователей. Оценка и выбор их основываются на **математических моделях и описаниях сигналов** систем ЦОС.

1.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Под **дискретными** понимают сигналы или функции, существующие при дискретных, как правило, равноотстоящих значениях своего аргумента. Мгновенные значения дискретного сигнала называют его **отсчетами, или выборками**.

Математически дискретный сигнал определяют:

функцией дискретного времени nT_d : $x(nT_d) = x(t)|_{t = nT_d}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, соответствующей выборкам аналогового сигнала в дискретные периодически повторяющиеся моменты времени;

функцией номера выборки n : $x(n) = x(nT_d)|_{T_d=1}$, в общем случае не связанной со временем;

функцией непрерывного времени t :

$$x_d(t) = x(t)f_\delta(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \delta(t - nT_d), \quad (1.1)$$

получаемой умножением аналогового сигнала $x(t)$ на **дискретизирующую функцию** $f_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_d)$ в виде периодической последовательности

δ -импульсов с периодом, равным T_d : $\delta(t - nT_d) = \begin{cases} \infty, & t = nT_d \\ 0, & t \neq nT_d \end{cases}$.

Графически дискретные сигналы представляются функцией номера выборки n или дискретного времени nT_d (рис. 1.3). Приводимую на графиках функцию непрерывного времени отождествляют либо с аналоговым сигналом $x(t)$, соответствующим дискретному сигналу $x(nT_d)$, либо с некоторой условной огибающей дискретной последовательности $x(n)$, более наглядно отображающей ее функциональную зависимость.

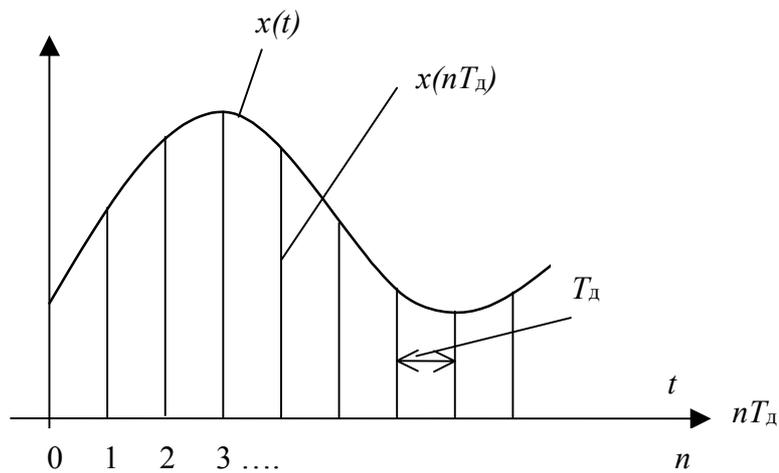


Рис. 1.3. График непрерывного $x(t)$ и дискретного $x(nT_d)$ сигнала

Сигналы $x_d(t)$ и $x(nT_d)$ связаны линейным соотношением $x(nT_d) = \int_{(n-0,5)T_d}^{(n+0,5)T_d} x_d(t) dt$ и имеют одинаковые свойства (но разные размерности).

Поэтому все вышеприведенные определения дискретного сигнала являются **математически адекватными**: $x(nT_d) \triangleq x(n) \triangleq x_d(t)$. Первые из них ($x(nT_d)$ и $x(n)$) непосредственно используются при описании и анализе дискретных и цифровых систем. Сигналы, представленные функцией номера выборки n , называют также **дискретными, или числовыми последовательностями**. Определение дискретного сигнала функцией непрерывного времени (1.1) эквивалентно **балансной модуляции** или взвешиванию площади периодически следующих δ -импульсов $f_\delta(t)$ дискретизируемым сигналом $x(t)$ или его выборками $x(nT_d)$ (рис. 1.4). Это определение позволяет с помощью известных методов описания аналоговых сигналов и систем получить математические описания и сопоставить свойства соответствующих им дискретных сигналов и систем [1, 2].

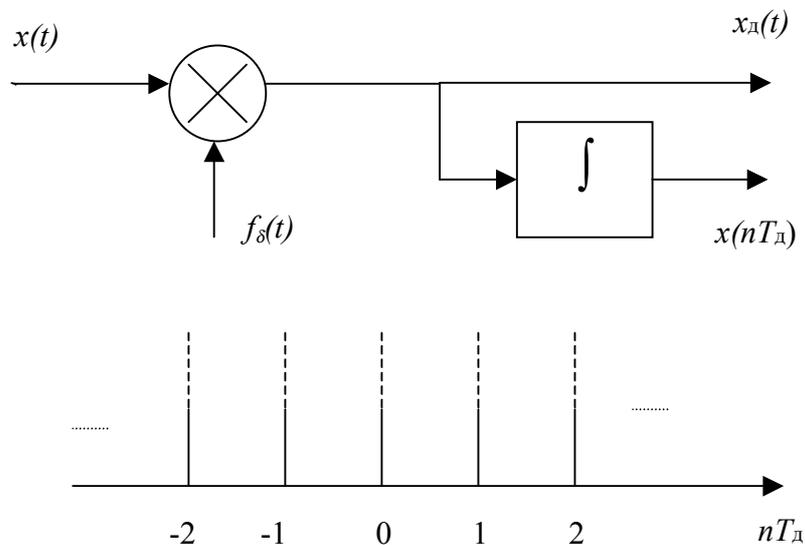


Рис. 1.4. Эквивалентная схема дискретизации сигнала по времени

В математике дискретные сигналы относятся к классу так называемых **решетчатых функций** или **временных рядов**.

1.3. СПЕКТР ДИСКРЕТНОГО СИГНАЛА

Спектральную плотность дискретного сигнала $X(j\omega)$, для упрощения называемую в дальнейшем **спектром**, можно найти, дискретизировав по времени преобразование Фурье соответствующего ему аналогового сигнала

$X_a(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$. Заменяв t на nT_d , интеграл на сумму и dt на T_d ,

получим

$$X(j\omega) = T_d \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) e^{-j\omega nT_d} . \quad (1.2)$$

С другой стороны, он может быть найден и прямым преобразованием Фурье дискретного сигнала, представленного функцией непрерывного времени (1.1):

$$X_d(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_d(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - nT_d) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) e^{-j\omega nT_d} \quad (1.3)$$

(при выводе использовано фильтрующее свойство δ -функции [1]).

Выражения (1.2) и (1.3) отличаются только масштабным (и размерным) множителем T_d , который при односкоростной обработке обычно опускают.

В силу периодичности комплексной экспоненты $e^{-j\omega nT_d} = e^{-j(\omega + k\omega_d)nT_d}$ спектр дискретного сигнала в отличие от аналогового периодичен по частоте с периодом ω_d : $X(j\omega) = X[j(\omega + k\omega_d)]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (рис.1.5). **Периодизация спектра обусловлена дискретизацией сигнала по времени.** Справедливо и обратное утверждение о периодичности сигналов с дискретным по частоте (или линейчатым) спектром. Оба эти свойства отвечают фундаментальному положению о **взаимосвязи дискретизации и периодизации сигналов во временной и частотной области** [1].

Определяют спектр дискретного сигнала в **основной полосе частот** ($0 \pm \omega_d/2$).

1.4. СВЯЗЬ МЕЖДУ СПЕКТРАМИ ДИСКРЕТНОГО И АНАЛОГОВОГО СИГНАЛОВ. ЯВЛЕНИЕ НАЛОЖЕНИЯ СПЕКТРОВ

Связь между спектрами дискретного и аналогового сигналов получается на основе определения дискретного сигнала (1.1), в котором дискретизирующая функция $f_\delta(t)$ представляется или заменяется

аппроксимирующим ее рядом Фурье $f_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_d t}$:

$$x_d(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_d t}. \quad (1.4)$$

Коэффициенты ряда $C_k = \frac{1}{T_d} \int_{nT_d - T_d/2}^{nT_d + T_d/2} \delta(t - nT_d) e^{-jk\omega_d t} dt = \frac{1}{T_d} e^{-jk\omega_d nT_d} = \frac{1}{T_d}$,

как и следовало ожидать, соответствуют равномерному дискретному (или линейчатому) спектру этой периодической функции. Такой спектр может быть описан также непрерывным преобразованием Фурье с помощью частотной дискретизирующей функции

$$F_\delta(j\omega) = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_d).$$

Преобразование Фурье (1.4) при $C_k = 1/T_d$ приводит к выражению

$$X_d(j\omega) = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{jk\omega_d t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[j(\omega - k\omega_d)]. \quad (1.5)$$

Этот же результат дает свертка спектра аналогового сигнала и частотной дискретизирующей функции, соответствующая произведению (1.1) во временной области:

$$\begin{aligned}
X_d(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\vartheta) F_\delta[j(\omega - \vartheta)] d\vartheta = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\vartheta) \delta(\omega - k\omega_d - \vartheta) d\vartheta = \\
&= \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[j(\omega - k\omega_d)].
\end{aligned}$$

Из (1.5) следует, что **спектр дискретного сигнала с точностью до постоянного множителя равен сумме спектров аналогового сигнала $X_a(j\omega)$, смещенных по частоте на $k\omega_d$** . Перенос спектра $X_a(j\omega)$ на частоты $k\omega_d$ вызван умножением аналогового сигнала на множество комплексных экспонент $e^{jk\omega_d t}$, являющихся гармониками дискретизирующей функции $f_\delta(t)$ (см. (1.4) и рис. 1.4). Он физически объясняет **явление размножения или периодизации спектров при дискретизации**, которое математически обосновано в 1.3.

Выражение (1.5) может быть проиллюстрировано для различных случаев дискретизации аналоговых сигналов с ограниченным (финитным) и неограниченным спектрами, которые во временной области имеют соответственно бесконечную и конечную длительности.

Первый случай соответствует аналоговому сигналу с финитным спектром, ограниченным максимальной частотой ω_m , отвечающей условию: $\omega_m \leq \omega_d/2$. При этом условии (рис. 1.5) спектр дискретного сигнала в основной полосе частот $\pm\omega_d/2$ (при $|\omega| \leq \omega_d/2$) точно совпадает (до постоянного множителя T_d) со спектром аналогового сигнала: $T_d X_d(j\omega) = X_a(j\omega)$. Дискретизация не сопровождается здесь искажениями. Условие $\omega_m \leq \omega_d/2$ или $\omega_d \geq 2\omega_m$ отвечает теореме отсчетов Котельникова. В этом случае возможно **точное восстановление аналогового сигнала по его дискретным выборкам** с помощью идеального ФНЧ с прямоугольной частотной характеристикой $P_{\omega_m}(j\omega)$, равной T_d при $|\omega| \leq \omega_d/2$ и равной нулю при $|\omega| > \omega_d/2$ (рис. 1.5).

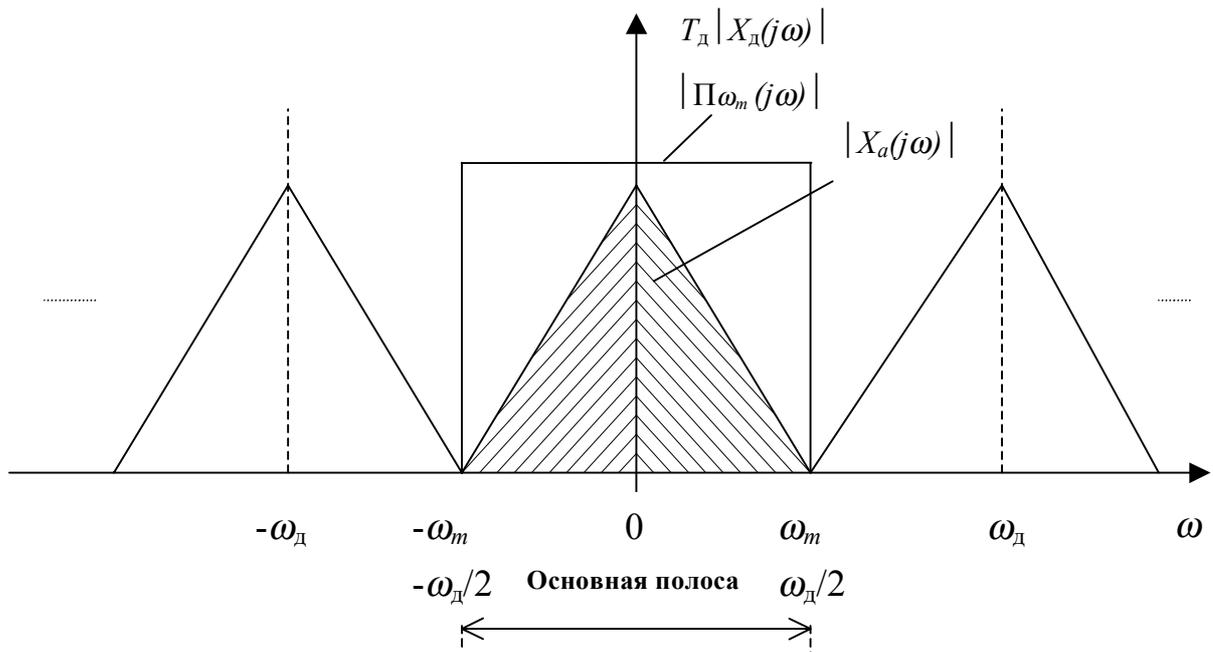


Рис. 1.5. Спектральные преобразования при дискретизации аналогового сигнала с финитным спектром в случае $\omega_d \geq 2\omega_m$

Сигнал на выходе ФНЧ соответствует обратному преобразованию Фурье депериодизированного спектра дискретного сигнала $\Pi_{\omega_m}(j\omega)X_d(j\omega)$:

$$x(t) = \frac{T_d}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} \Pi_{\omega_m}(j\omega) X_d(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \frac{\sin[\omega_d(t - nT_d)/2]}{\omega_d(t - nT_d)/2}. \quad (1.6)$$

Выражение (1.6) является разложением аналогового сигнала $x(t)$ в ряд по базисным интерполирующим функциям $\sin x/x$ с весовыми коэффициентами $x(nT_d)$ (**ряд Котельникова**), в соответствии с которым и осуществляется его восстановление [1].

Восстановление аналогового сигнала может быть представлено также сверткой дискретного сигнала $x_d(t)$ с импульсной характеристикой идеального ФНЧ $h(t)$, связанной обратным преобразованием Фурье с его частотной характеристикой:

$$h(t) = \frac{T_d}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} \Pi_{\omega_m}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = (\sin \omega_d t/2)/(\omega_d t/2). \quad (1.7)$$

Подстановка (1.7) в интеграл свертки $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_d(\tau)h(t - \tau)d\tau$ и его вычисление приводят к интерполяционному ряду (1.6).

Частота, определяемая как $\omega_d/2 = \omega_m$, носит известное по зарубежной литературе название **частоты Найквиста**.

Во втором случае, когда сигнал с финитным спектром дискретизируется с частотой $\omega_d < 2\omega_m$ (рис.1.6, а) спектр дискретного сигнала в основной полосе частот $|\omega| \leq \omega_d/2$ отличается от спектра аналогового сигнала:

$T_d X_d(j\omega) \neq X_a(j\omega)$. Периодизация спектра $X_a(j\omega)$ здесь приводит к перекрытию и суммированию его с соседними смещенными по частоте спектрами $X_a[j(\omega - k\omega_d)]$ (на рис.1.6, а $k = \pm 1$). Это явление называют **наложением спектров при дискретизации**. Связанные с ним погрешности дискретизации также называют погрешностями или **искажениями наложения**. При наложении невозможно точное восстановление аналогового сигнала по его дискретным выборкам.

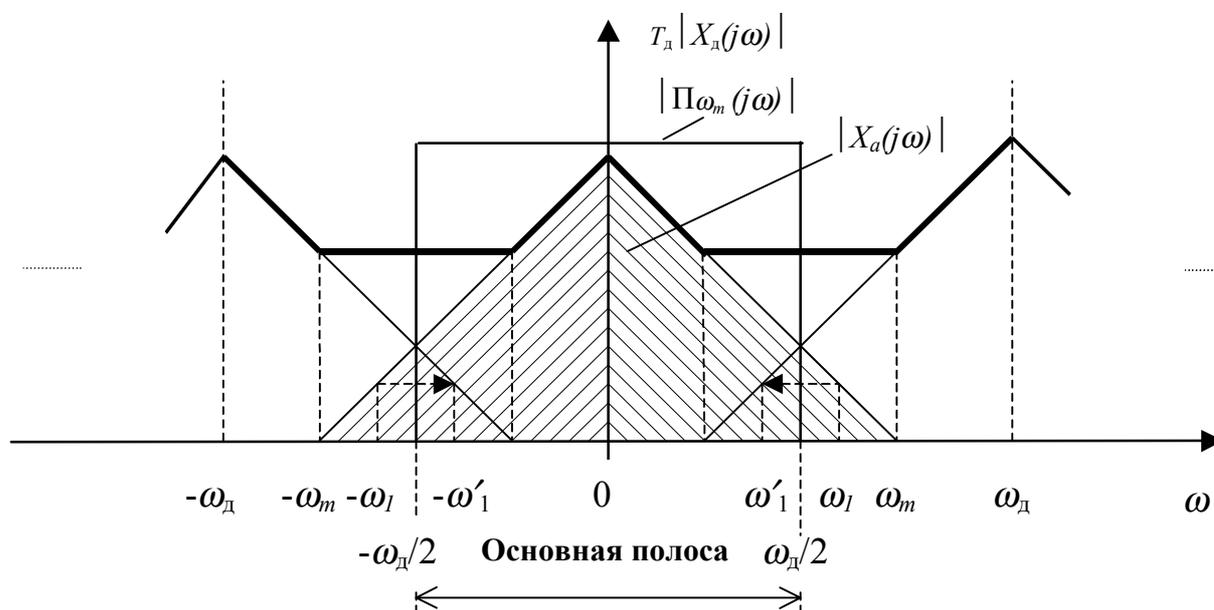


Рис. 1.6 а. Спектральные преобразования при дискретизации аналогового сигнала с финитным спектром в случае $\omega_d < 2\omega_m$

Третий случай соответствует сигналу $x(t)$ конечной длительности T_c с неограниченным по частоте, но затухающим спектром. Такой сигнал можно представить произведением соответствующего ему сигнала бесконечной длительности $x_\infty(t)$ и прямоугольной весовой функции $\Pi_{T_c}(t)$ конечной длины T_c : $x(t) = x_\infty(t)\Pi_{T_c}(t)$ (так называемый временной фильтр [4]). В частотной области это соответствует свертке спектра $X_{a\infty}(j\omega)$ сигнала $x_\infty(t)$ с частотной характеристикой $\Pi_{T_c}(j\omega) = \sin(\omega T_c/2)/(\omega T_c/2)$ весовой функции $X_a(j\omega) = X_{a\infty}(j\omega)*\Pi_{T_c}(j\omega)$, которая и приводит к **размыванию по частоте спектра сигнала** конечной длительности. Это относится, в частности, и к **простому гармоническому колебанию**, спектр которого при конечной длине сигнала

является теоретически бесконечным. Наложение спектров в данном случае (рис.1.6, б) имеет место при любом значении частоты дискретизации, но уровни смещенных по частоте спектров, перекрывающиеся в основной полосе, уменьшаются с ростом частоты дискретизации.

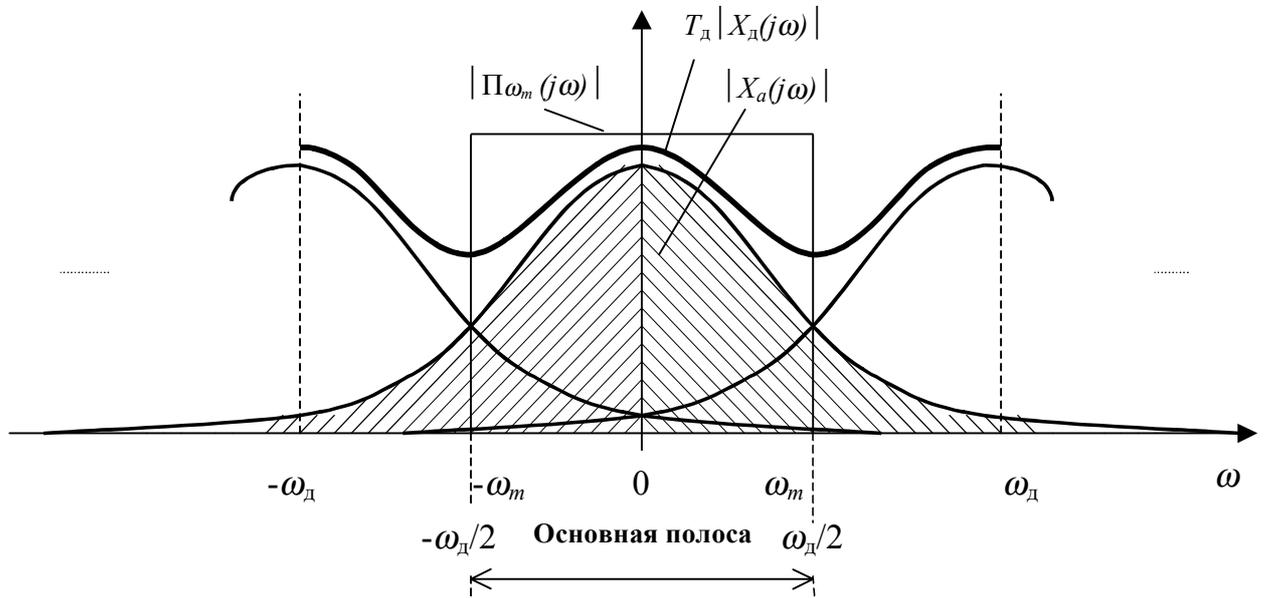


Рис. 1.6 б. Спектральные преобразования при дискретизации аналогового сигнала конечной длительности

Восстановленный с помощью идеального ФНЧ или интерполяционного ряда Котельникова сигнал $\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_d) \frac{\sin[\omega_d(t - nT_d)/2]}{\omega_d(t - nT_d)/2}$ отличается по форме от сигнала $x(t)$ и имеет бесконечную длительность. Частота дискретизации сигнала конечной длительности $f_d = 2f_m$ и число его отсчетов или выборок $N = f_d T_c = 2f_m T_c$, называемое базой сигнала $x(t)$ [1], связываются в данном случае с некоторой частотой его спектра f_m , **условно принимаемой за максимальную**. Она является граничной частотой финитного спектра аппроксимирующего сигнала $\hat{x}(t)$, совпадающего со спектром дискретного сигнала $x(nT_d)$ в основной полосе частот $\pm f_d/2$.

С наложением спектров при дискретизации реальных сигналов связано также **явление подмены или маскирования частот**, в результате которого частотный состав дискретного сигнала в основной полосе частот $\pm f_d/2$ может отличаться от состава частот аналогового сигнала в той же полосе частот. Это обусловлено тем, что высокочастотные составляющие сигнала, а также внешние шумы или помехи с частотами $\omega_{вч} > \omega_d/2$ при дискретизации **трансформируются** или преобразуются в основную полосу частот дискретного сигнала, создавая **помехи наложения** на частотах $\omega'_{вч} = |\omega_{вч} -$

$k\omega_d| \leq \omega_d/2$. В общем случае такие частотные составляющие либо отсутствуют во входном сигнале, либо накладываются на существующие, искажая исходный спектр. Например, частота ω_1 на рис.1.6, а преобразуется в частоту $\omega'_1 = \omega_d - \omega_1$. Говорят, что она подменяет частоту ω'_1 или маскируется под частоту ω'_1 , которой во входном сигнале могло и не быть. График преобразования частот аналогового сигнала f_{AC} и дискретного сигнала f_{DC} показан на рис. 1.7.

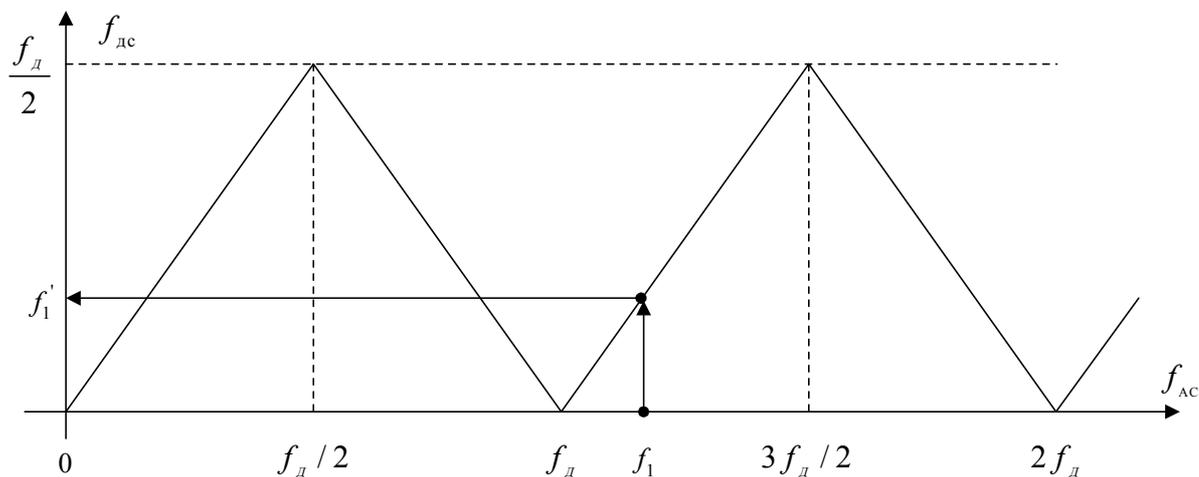


Рис. 1.7. График преобразования частот при дискретизации сигнала

Другой наглядный способ анализа преобразования частот (подмены частот) [35] при дискретизации дает также диаграмма рис. 1.8.

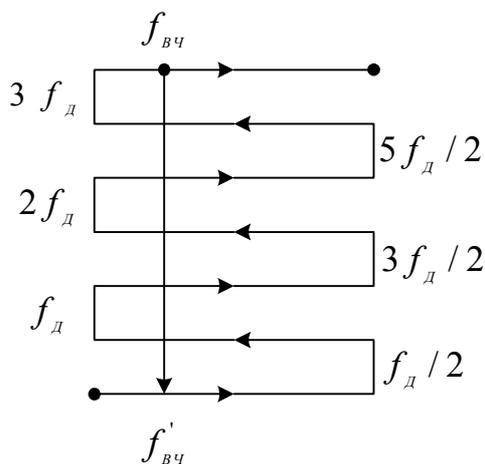


Рис. 1.8. Диаграмма подмены частот при дискретизации сигнала

Ослабить уровень помех наложения можно, только ограничив полосу частот дискретизируемого сигнала, приведя ее в соответствие с частотой дискретизации сигнала. В этом и заключается роль аналогового

ФНЧ на входе системы ЦОС, как и его название – противомаскировочный.

1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОЦЕНКА МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ, ВЫЗЫВАЕМОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ СИГНАЛА ПО ВРЕМЕНИ

Как показано выше, дискретизация сигналов с неограниченным по частоте спектром, как и сигналов с финитным, но не отвечающим условию

$\omega_d \leq \omega_m/2$, сопровождается **методической погрешностью** $\Delta x(t) = \hat{x}(t) - x(t)$, равной разности восстановленного и исходного аналоговых сигналов. Количественно погрешность оценивают **предельным значением** $|\Delta x(t)|_{\max}$ или **интегральным (среднеквадратичным)**. Последнее определяют в виде корня квадратного из отношения энергий разностного сигнала (ошибки) $E[\Delta x(t)]$ и исходного $E[x(t)]$:

$$\varepsilon = \{E[\Delta x(t)]/E[x(t)]\}^{1/2},$$

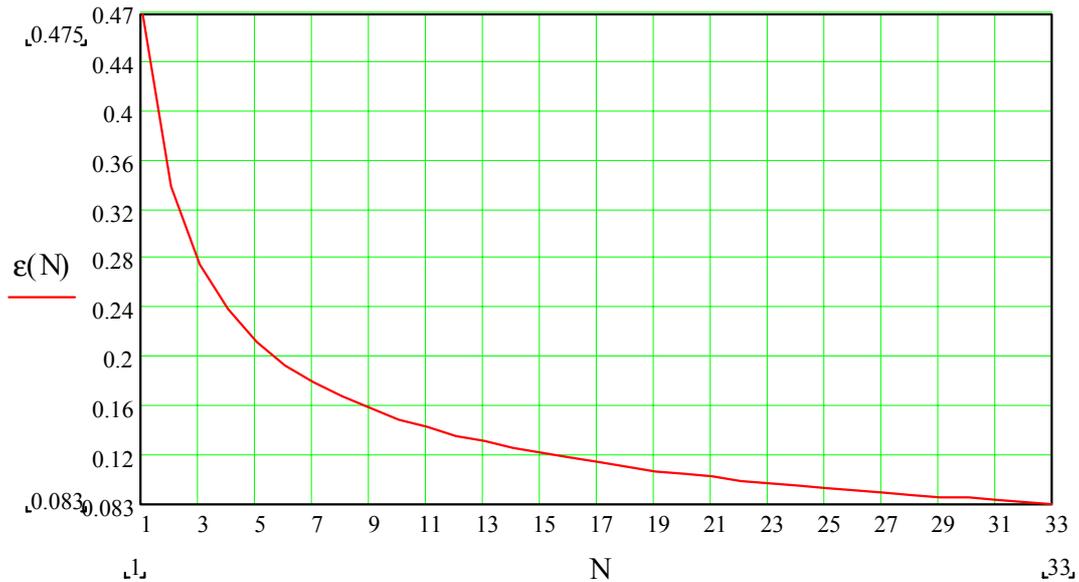
$$\text{где } E[\Delta x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(j\omega) - X_d(j\omega)P_{\omega_d/2}(j\omega)|^2 d\omega,$$

$$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(j\omega)|^2 d\omega. \quad (1.8)$$

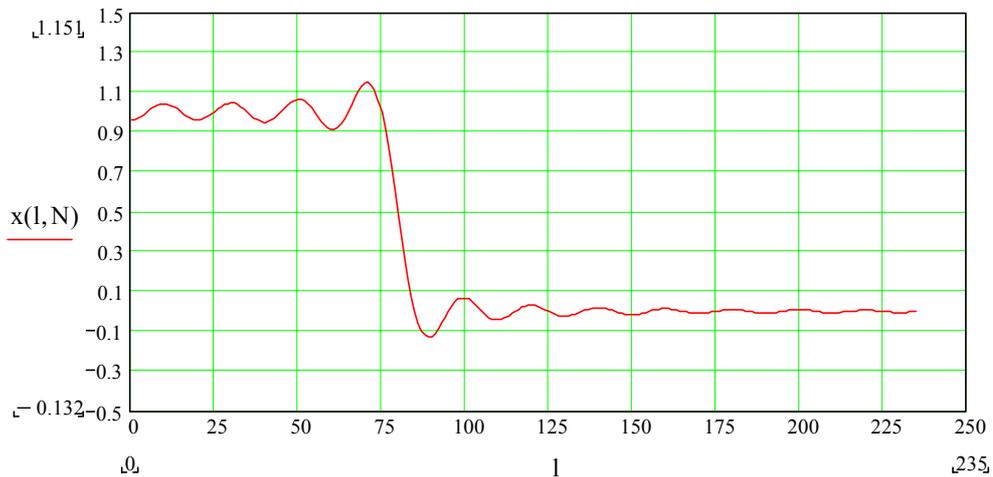
Двум способам выражения энергии сигналов в (1.8) соответствуют **временной и спектральный** способы оценки относительной среднеквадратичной погрешности дискретизации, причем спектральный способ оценки во многих случаях оказывается эффективнее [3].

В качестве примера в соответствии с (1.8) рассчитаны погрешности дискретизации прямоугольного импульса длительностью $T_u = NT_d$ при различных значениях $N = T_u/T_d = T_u f_d$. Результаты расчета, выполненного с помощью программы MathCad (рис. 1.9, а) характеризуют зависимость погрешности от частоты дискретизации $f_d = N/T_u = N\Delta f_{2\pi}/2$, где $\Delta f_{2\pi} = 2/T_u$ – ширина главного лепестка спектральной плотности прямоугольного импульса. На рис. 1.9, б показан также график восстановленного сигнала $\hat{x}(t)$, вычисленного в моменты времени $t = 0, 1T_d, 2T_d, \dots$ для случая $N = 16$ или $f_d = 16/T_u$.

О порядке погрешности дискретизации сигналов конечной длительности T_c можно судить также по соотношению [4]: $\varepsilon = 1/(f_m T_c)$. При $f_d = 2f_m$ и $T_c = NT_d$ оно принимает вид: $\varepsilon = 2/N$. Например, при $N = 100$ $\varepsilon = 2\%$.



а)



б)

Рис. 1.9. Графики зависимости погрешности дискретизации (а) и восстановленного сигнала (б) для прямоугольного импульса

1.6. ПРАКТИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СИГНАЛА

Осуществляется дискретизация с помощью специальных устройств, называемых **устройствами или схемами выборки - хранения** (УВХ, СВХ). Простейшая их схема (рис. 1.10, а) содержит ключ и запоминающий конденсатор (аналоговая память). Замкнутому состоянию ключа соответствует **время выборки** УВХ ($t_в$), разомкнутому – **время хранения** ($t_{хр}$). На графике выходного сигнала идеального УВХ $\hat{x}(t)$ (рис. 1.10, б) время выборки стремится к нулю, а время хранения равно периоду дискретизации.

Математически такое УВХ эквивалентно **фильтру-интерполятору нулевого порядка**. Практически время хранения должно быть не менее

времени преобразования t_{np} АЦП: $t_{xp} \geq t_{np}$, при этом время выборки может быть увеличено до $t_{\theta} = T_{д} - t_{xp}$ (рис.1.10, в).

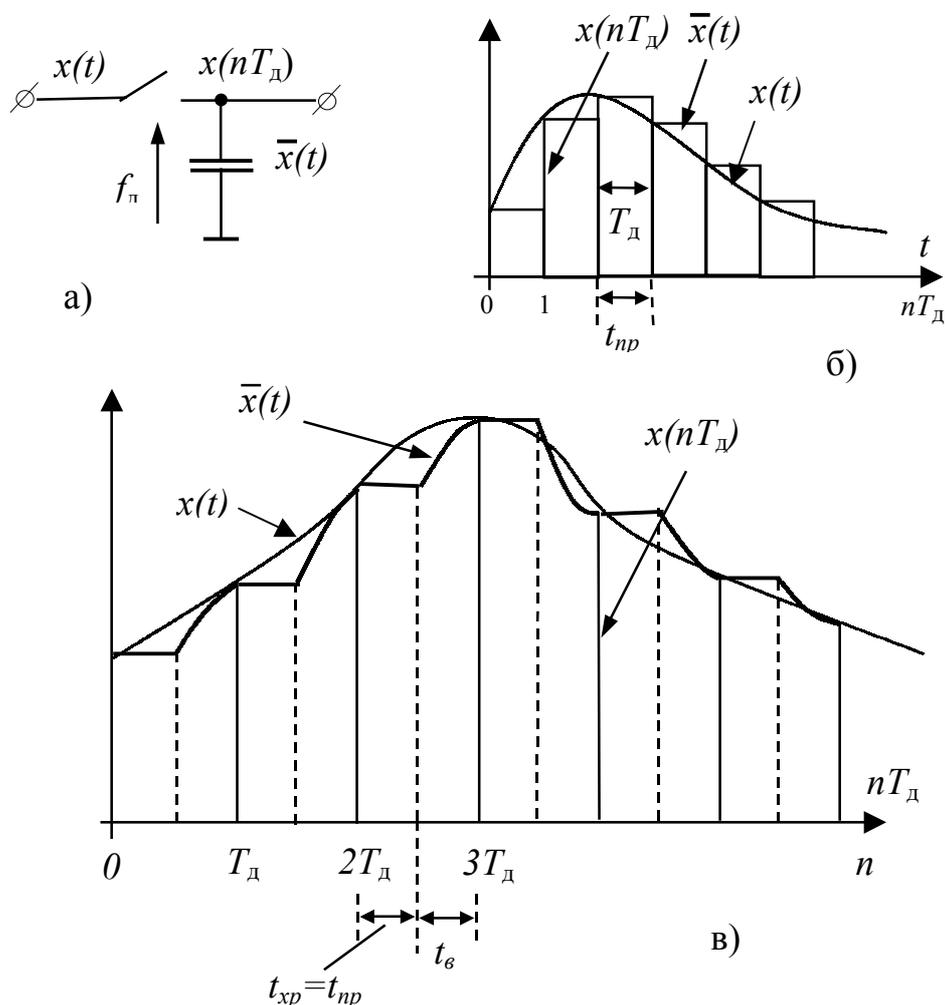


Рис. 1.10. Простейшая схема УВХ (а) и ее идеализированные сигналы (б, в)

Реальные УВХ характеризуются также погрешностью, вызываемой разрядом конденсатора C (**погрешностью хранения**), которая не должна выходить за пределы **единицы младшего разряда АЦП**, и **апертурным временем** t_a , отражающим неопределенность моментов времени $nT_{д}$ перехода схемы из режима выборки в режим хранения.

Апертурная погрешность Δx_a , вносимая УВХ, определяется его апертурным временем t_a и скоростью изменения сигнала в моменты времени $nT_{д}$: $\Delta x_a = x'(t)t_a$. Она имеет **случайную составляющую**, обусловленную флуктуациями апертурного времени, и **систематическую**. Влияние случайной составляющей эквивалентно наложению на сигнал некоторого шума (**шума апертуры**), а систематической – влиянию некоторого **эквивалентного фильтра**, искажающего спектр дискретного сигнала. Спектр реального дискретного сигнала (рис. 1.11) равен периодическому по частоте

незатухающему спектру $X_d(j\omega)$ его математической модели $x_d(t)$ (или $x(n)$), умноженному на частотную характеристику эквивалентного фильтра $H_a(j\omega)$, зависящую от значения апертурного времени t_a . В первом приближении ее отождествляют со спектром прямоугольного импульса длительностью t_a : $H_a(j\omega) = e^{-j\omega t_a/2} [\sin(\omega t_a/2)/(\omega t_a/2)]$. Первый нуль этой характеристики имеет частоту $\omega_1 = 2\pi/t_a$. Если время t_a достаточно мало, то искажение спектра дискретного сигнала в основной полосе частот $\pm\omega_D/2$ практически несущественно.

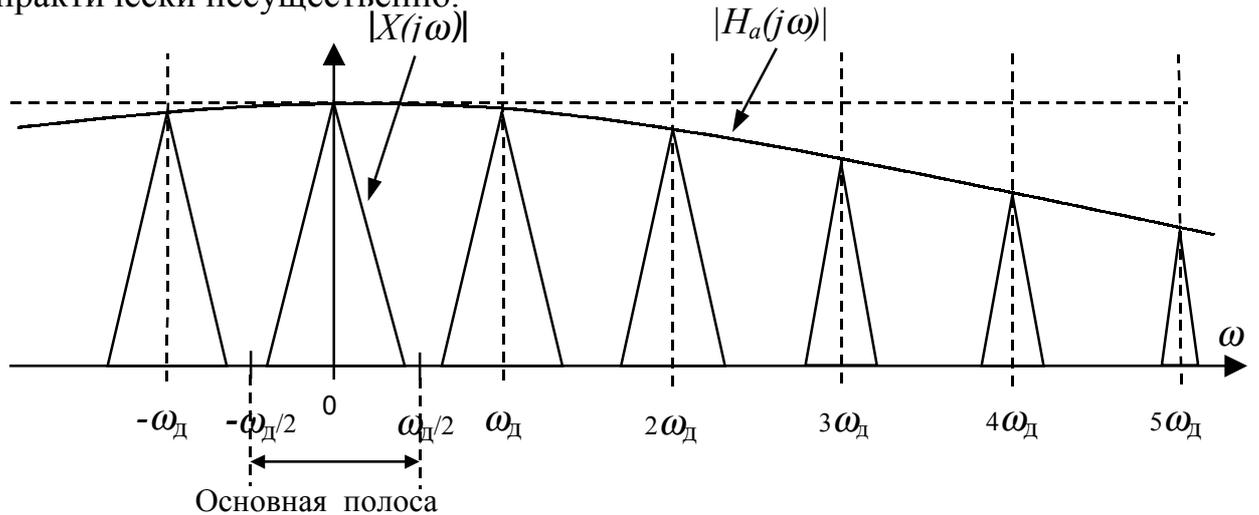


Рис. 1.11. Апертурное искажение спектра дискретного сигнала

При использовании быстродействующего АЦП без УВХ, что возможно, если изменения сигнала за время преобразования АЦП не превосходят по значению единицы младшего разряда, время преобразования одновременно определяет и **апертурное время АЦП**.

Таким образом, **общая погрешность**, возникающая при дискретизации сигнала, складывается из **методической погрешности**, вызываемой наложением спектров, и **инструментальной**, вносимой УВХ и АЦП.

Влияние ВЧ-составляющих в спектре дискретизируемого сигнала эффективно уменьшается с помощью специальных **УВХ усредняющего (интегрирующего)** типа [4, 5, 6].

Инструментальные погрешности и характеристики современных интегральных УВХ и АЦП рассмотрены в [7, 8, 9].

1.7. УСЛОВИЯ ВЫБОРА ЧАСТОТЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Частота дискретизации определяет **скорость обработки сигнала и требуемое быстродействие АЦП и процессора ЦОС**. Поэтому в каждом случае стремятся к ее **минимально возможному значению**, учитывающему особенности дискретизируемого сигнала и цели его обработки. Сложность выбора частоты дискретизации в соответствии с общим условием $f_d \geq 2f_m$ связана с неопределенностью или условностью верхней границы спектра реальных аналоговых сигналов f_m .

Возможны случаи дискретизации с **ограничением или без ограничения частотного спектра сигнала с помощью аналогового ФНЧ**.

Без предварительного ограничения могут быть дискретизированы так называемые чистые или сильные сигналы с естественно убывающим по частоте спектром. При выборе частоты дискретизации таких сигналов исходят **либо** из максимальной частоты спектра f_m ($f_d = 2f_m$), при которой искажения наложения **интегрально** не превышают допустимое значение во всей полосе частот $\pm f_d/2$ дискретного сигнала, **либо** из частоты спектра сигнала f'_m ($f_d = 2\alpha f'_m$), определяющей его полезную или информативную полосу ($0-f'_m$), переносимую в основную полосу частот дискретного сигнала с допустимой погрешностью наложения, оцениваемой в полосе частот ($0-f'_m$) дискретного сигнала. Коэффициент α характеризует **избыток дискретизации**, обусловленный неограниченностью спектра преобразуемого сигнала.

Если же уровень не учитываемых в случае сильного сигнала шумов и помех с полосой, перекрывающей спектр полезного выделяемого сигнала, достаточно велик, то дискретизация без предварительного ограничения спектра с частотой, выбранной для чистого сигнала, **приведет к увеличению спектральной плотности мощности шума и помех в основной полосе частот дискретного сигнала $\pm f_d/2$** (включая и полосу ($0-f'_m$) из-за многократной трансформации в эту полосу их высокочастотных составляющих, превышающих частоту Найквиста $f_d/2$. Кратность трансформации или наложения при этом равна отношению максимальной частоты спектра шума и помех к половине принятой частоты дискретизации сигнала.

В данном случае, как и в случае дискретизации чистого сигнала с выделяемой полезной полосой спектра ($0-f'_m$), целесообразно предварительное ограничение спектра аналогового сигнала противомаскировочным ФНЧ с частотой среза $f_c = f'_m$. При дискретизации чистого сигнала это приводит к снижению необходимого коэффициента α , т. е. избытка дискретизации, а при дискретизации сигнала с наложенным на него шумом и помехами обеспечивает уменьшение их спектральной

плотности мощности и снижение искажений в полезной полосе частот $(0-f'_m)$ или $(0-f_c)$ дискретного сигнала. Степень уменьшения при этом такая же, как и увеличения при дискретизации без ограничения спектра.

Частота дискретизации при ограничении спектра аналогового сигнала определяется соотношением $f_d = 2\alpha f'_m$, где частота f'_m отождествляется здесь с частотой среза аналогового ФНЧ f_c . Коэффициент α зависит от наклона АЧХ фильтра и затухания ее в полосе задерживания, которые связаны, в свою очередь, с погрешностью дискретизации сигнала в полосе $(0-f'_m)$. В [36] приведены значения наклонов АЧХ аналогового ФНЧ, необходимые для ослабления эффекта наложения на 70 дБ для некоторых отношений частоты дискретизации к частоте среза фильтра, соответствующих удвоенным значениям коэффициента α . Для $f_d/f_c = 3,75$; 2,65 и 2,5 наклон равен соответственно -48 ; -96 и -120 дБ/октаву. При $f_d/f_c = 2$ он должен быть бесконечен.

Эти данные говорят о достаточно высоких требованиях к аналоговому ФНЧ и сложности его реализации. Поэтому в современных высококачественных цифровых системах, например, звуковых или музыкальных, сигнал после предварительного ограничения по полосе простым аналоговым фильтром дискретизируется с высокой частотой дискретизации и обрабатывается цифровым фильтром с крутыми срезами АЧХ, которым и осуществляется основное ограничение его частотного спектра. Для снижения скорости последующей обработки частота дискретизации выходного сигнала цифрового фильтра понижается путем прореживания сигнала по времени и приводится в соответствие с ограниченной полосой его спектра [38, 44].

Следует отметить, что понижение частоты дискретизации цифрового сигнала и уменьшение периода повторения его спектра создает дополнительные искажения наложения, зависящие от затухания АЧХ в полосе задерживания фильтра. Увеличивая затухание фильтра, можно сделать уровень этих искажений сколь угодно малым [11, 40].

Для видов обработки, предусматривающих восстановление сигнала с целью, например, его аналоговой записи, контроля или акустического воспроизведения, при выборе частоты дискретизации в односкоростной системе нужно учитывать также проблему обеспечения требуемой точности восстановления сигнала. Она зависит от соотношения частоты его дискретизации к частоте f'_m , ограничивающей полезную полосу частот восстанавливаемого сигнала. Этим соотношением определяются требования к сглаживающему аналоговому ФНЧ на выходе ЦАП, которые аналогичны требованиям к противомаскировочному аналоговому фильтру на входе АЦП.

При дискретизации случайных сигналов выбор частоты дискретизации возможен также по минимальному времени корреляции случайного сигнала с ограниченным по частоте спектром: $f_d \geq 2\alpha/\tau_{кор.мин}$.

Наибольшие особенности выбора частоты дискретизации связаны с цифровой обработкой широко используемых в радиотехнике и других областях узкополосных (модулированных) сигналов. Такие сигналы характеризуются малым отношением информационной полосы спектра $2F_m$ к центральной частоте f_o . Цель их обработки состоит в выделении медленно изменяющейся огибающей сигнала и извлечении заключенной в ней информации, т. е. в **демодуляции сигнала**. Поэтому дискретизация таких сигналов возможна с частотой $f_d \ll 2(f_o + F_m)$ - намного меньшей удвоенной максимальной частоты их спектра. Ее называют также **субдискретизацией** сигнала [1, 4]. Она осуществляется за счет преобразования спектра сигнала на высших гармониках частоты дискретизации kf_d и обусловленного им переноса информационных спектральных полос шириной $2F_m$ в низкочастотную основную полосу $\pm f_d/2$ дискретного сигнала. Частота дискретизации при этом выбирается так, чтобы периодизация и размножение спектра узкополосного сигнала, порождаемые дискретизацией, не привели к взаимному перекрытию и наложению его выделяемых информационных полос.

Минимальная частота дискретизации узкополосных сигналов может иметь значение $f_{d\min} = 4F_m$ при обработке вещественных сигналов и $f_{d\min} = 2F_m$ – при квадратурной обработке комплексных сигналов. Например, условие $f_{d\min} = 4F_m$ выполняется, если нижняя и верхняя граничные частоты спектра сигнала $f_{\text{н}}$, $f_{\text{в}}$ находятся в соотношении

$$f_{\text{н}} = 2iF_m, f_o = f_{\text{н}} + F_m, f_{\text{в}} = f_{\text{н}} + 2F_m, \text{ где } i = 0, 1, 2, \dots - \text{целые числа (рис. 1.12).}$$

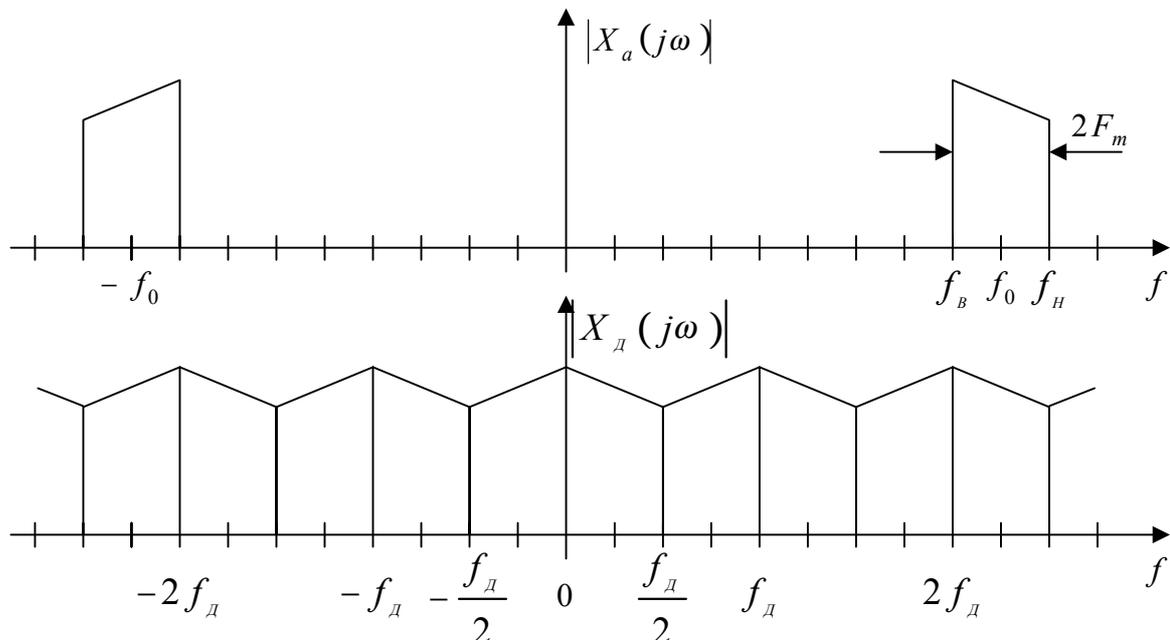


Рис.1.12. Преобразование спектра узкополосного сигнала в случае $f_d = 4F_m, f_o = (2i+1)F_m$

При нечетном i имеет место так называемая **инверсия спектра** огибающей. Для исключения ее нужно сместить спектр цифрового сигнала по частоте на $f_d/2$, что реализуется достаточно простой операцией $y(n) = (-1)^n x(n)$ [11, 40].

Восстановление узкополосного сигнала по его дискретным выборкам возможно с помощью интерполяционного ряда Котельникова, обобщенного на узкополосные сигналы [1]. В данном случае он определяется выражением [6]:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \frac{\sin[2\pi F_m(t - nT_d)]}{2\pi F_m(t - nT_d)} \cos 2\pi f_0(t - nT_d).$$

Так как реально ограничение спектра узкополосного сигнала осуществляется полосовым фильтром, имеющим конечную переходную полосу Δf_3 , дискретизация с минимальной частотой $f_{d \min}$ сопровождается искажениями наложения. Как и для рассмотренных выше сигналов со спектром, примыкающим к нулевой частоте, уменьшить искажения можно повысив частоту дискретизации до значения $f_d = 4\alpha F_m = 4F'_m$, где $F'_m = F_m + \Delta f_3$, $\alpha = 1 + \Delta f_3/F_m$. При этом нижняя и верхняя условные граничные частоты спектра $f'_H = f_0 - F_m - \Delta f_3$, $f'_B = f_0 + F_m + \Delta f_3$ должны также отвечать приведенным выше условиям: $f'_H = 2iF'_m$; $f'_B = 2(i+1)F'_m$.

Введение варьируемых защитных полос Δf_3 , разделяющих информационные полосы $2F_m$ в спектре дискретного сигнала, позволяет при заданном уровне искажений наложения найти минимально необходимое (оптимальное) значение частоты дискретизации для произвольных граничных частот f_n, f_e полосового сигнала [6].

Субдискретизация снижает необходимое быстродействие АЦП, но предъявляет высокие требования к апертурному времени УВХ, так как апертурная погрешность в данном случае обратно пропорциональна мгновенной скорости быстроизменяющегося высокочастотного сигнала. При дискретизации узкополосных сигналов применяют также УВХ интегрирующего типа.

Таким образом, используя субдискретизацию, можно выполнить цифровую обработку непосредственно на несущей или промежуточной частоте сигнала. Более подробно вопросы цифровой обработки узкополосных сигналов являются предметом изучения специальных дисциплин, например «Устройства приема и обработки сигналов». Достаточно полно они освещены также в [4, 6, 37].

К субдискретизации относится также когерентное стробоскопическое преобразование периодических высокочастотных или быстроизменяющихся сигналов, обеспечивающее трансформацию их спектра в область низких частот, где эффективно используются методы и

средства ЦОС [5]. Принцип стробоскопического преобразования или когерентной выборки заключается в жесткой связи между частотой дискретизации и частотой сигнала или их гармониками и субгармониками. Он легко иллюстрируется во временной и частотной области на примере простого гармонического колебания, частота f_c которого в результате преобразования на гармониках частоты дискретизации переносится на низкую частоту $F_{np} = |kf_d - f_c|$, заключенную в пределах $0-f_d/2$. Стробоскопическое преобразование применяется в цифровой осциллографии, при цифровом измерении параметров сигналов и характеристик объектов [10]. Такие измерители, реализуемые на базе персональных компьютеров со встроенными или внешними средствами аналогового ввода - вывода, называются модульными виртуальными приборами или инструментами [41]. Вопросы дискретизации и цифровой оценки параметров сигналов для них рассмотрены в [42, 43].

1.8. КВАНТОВАНИЕ СИГНАЛОВ ПО УРОВНЮ

1.8.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СПОСОБЫ

При квантовании по уровню бесконечное множество возможных значений дискретного сигнала $x(n)$ в заданном максимальном диапазоне его изменения $D_{x_{max}} = (x_{max} - x_{min})$ замещается **конечным числом уровней квантования** m дискретного квантованного сигнала $x_{кв}(n)$. С одним из них в соответствии с определенным правилом или алгоритмом и **отождествляется** точное мгновенное значение дискретного сигнала $x(n)$ (рис. 1.13). Интервал между уровнями квантования называется **шагом квантования по уровню** $Q = D_{x_{max}} / m$.

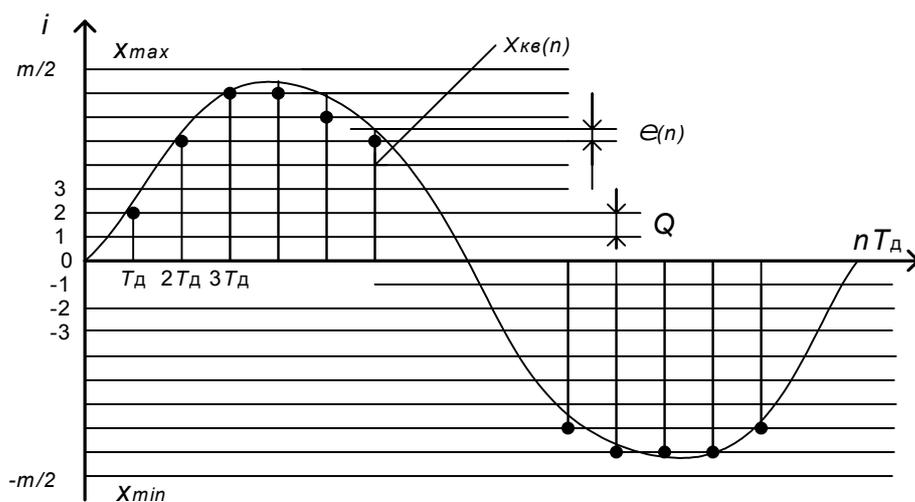


Рис.1.13. Иллюстрация квантования сигнала по уровню

Квантование возможно с усечением и с округлением. Квантованный дискретный сигнал $x_{кв}(n)$ определяется при этом как

$$x_{кв}(n) = [x(n)/Q]_{ц.ч.} Q = iQ \quad (1.9)$$

при усечении и

$$x_{кв}(n) = [(x(n)/Q) + 0,5]_{ц.ч.} Q = iQ \quad (1.9')$$

при округлении, где $i = [\cdot]_{ц.ч.}$ – это целая часть отношения, заключенного в прямые скобки и соответствующая номеру уровня квантования, с которым отождествляется точное значение квантуемого дискретного сигнала с ближайшим меньшим – при усечении и ближайшим – при округлении. Для однополярного сигнала $0 \leq i \leq (m-1)$, двухполярного $(-m/2) \leq i \leq (m/2) - 1$.

1.8.2. ПОГРЕШНОСТЬ КВАНТОВАНИЯ

Разность между квантованным и точным значениями дискретного сигнала: $e(n) = x_{кв}(n) - x(n)$ определяет **погрешность, возникающую при квантовании сигнала по уровню**. В соответствии с **амплитудной характеристикой квантователя** она принимает значения $-Q < e(n) \leq 0$ – при усечении (рис.1.14, а, б) и $-Q/2 < e(n) \leq Q/2$ – при округлении (рис.1.15, а, б). Предельные значения погрешности квантования $E_m = |e(n)|_{\max} = \eta Q$, где $\eta = 1$ при усечении и $1/2$ при округлении.

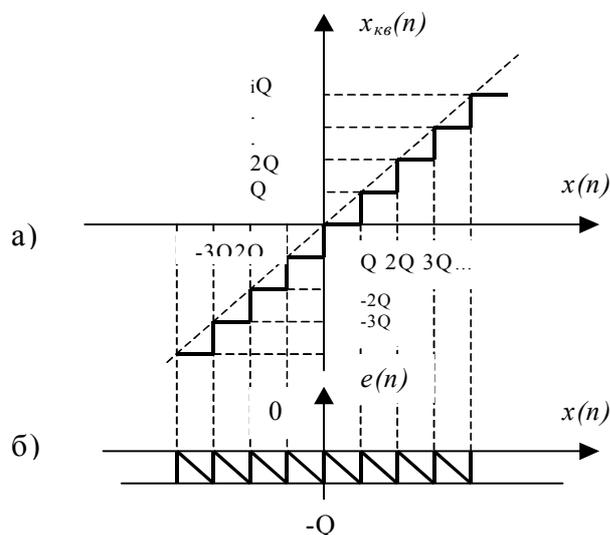


Рис. 1.14. Амплитудная характеристика квантования с усечением (а) и соответствующая ему погрешность квантования (б)

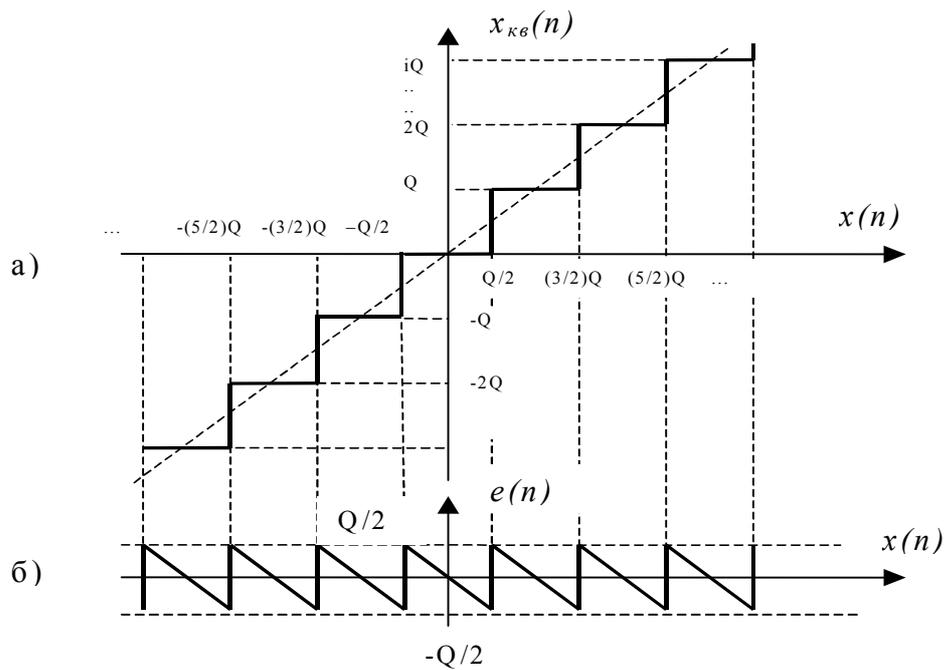


Рис. 1.15. Амплитудная характеристика квантования с округлением (а) и соответствующая ему погрешность квантования (б)

Вследствие **априорной неизвестности** значений сигнала и погрешности квантования ее рассматривают как случайный дискретный процесс или **шум квантования**, накладывающийся на квантуемый дискретный сигнал: $x_{кв}(n) = x(n) + e(n)$ и с равной вероятностью принимающий любые значения в вышеуказанных пределах. На графиках законов распределения шума квантования рис.1.16, а, б обоим способам квантования соответствует одинаковая плотность вероятностей $p(e)=1/Q$, отвечающая условию нормировки.

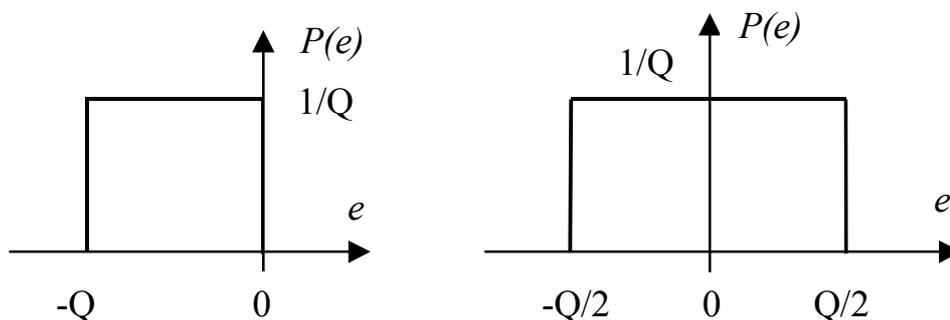


Рис. 1.16. Плотности вероятностей шума квантования при усечении (а) и округлении (б)

Шум квантования характеризуется следующими параметрами:

математическим ожиданием $M[e] = \int_{-Q}^0 ep(e)de = -Q/2$ – при усечении и

$$M[e] = \int_{-Q/2}^{Q/2} ep(e)de = 0 \text{ – при округлении;}$$

дисперсией $D[e] = \int_{-Q/2}^{Q/2} e^2 p(e)de = Q^2/12$ – для обоих способов

квантования;

среднеквадратическим значением $\sigma_e = Q/\sqrt{12}$.

Спектрально-корреляционные свойства шума квантования существенно зависят от вида и параметров преобразуемого сигнала. В общем случае значения отсчетов шума квантования коррелированы со значениями входного сигнала и между собой. Наиболее высокая степень корреляции наблюдается при детерминированных сигналах и наименьшая – случайных. К последним относятся реальные речевые, музыкальные сигналы, выходные сигналы измерительных датчиков, а также любые сигналы на входе системы ЦОС с наложенными на них шумами или случайными помехами. Наложение внешнего шума или помехи с приведенным ко входу АЦП уровнем, превышающим значение единицы младшего разряда Q , существенно декоррелирует или рандомизирует шум квантования [44]. Это позволяет рассматривать шум квантования, возникающий при преобразовании случайного сигнала, как дискретный случайный процесс типа белый шум с равномерной спектральной плотностью: $P_{кв} = \sigma_{кв}^2/f_d$. **Повышение частоты дискретизации f_d уменьшает спектральную плотность шума квантования в основной полосе**, позволяя при определенных условиях уменьшить необходимое значение разрядности АЦП, т. е. обменять разрядность сигнала на скорость его обработки [44].

Модель шума квантования с вышеприведенными характеристиками широко используется в теории ЦОС.

1.9. ЦИФРОВОЕ КОДИРОВАНИЕ СИГНАЛА

1.9.1. АЛГОРИТМЫ КОДИРОВАНИЯ И ФОРМАТЫ ЦИФРОВОГО СИГНАЛА

Номер уровня квантования i при известном значении шага квантования Q однозначно определяет значение дискретного квантованного сигнала и, следовательно, является его **цифровым эквивалентом**. Представленный в двоичном коде ($i_{(2)}$), он соответствует цифровому сигналу на выходе АЦП $x_u(n)$. Число двоичных разрядов АЦП $q_{\text{ацп}}$ связано с числом уровней квантования m соотношением $q_{\text{ацп}} = \log_2 m$. Для 10-разрядного АЦП $m = 2^{q_{\text{ацп}}} = 1024$, для АЦП разрядностью 12 бит – $m = 4096$ и т. д.

Возможно **целочисленное и дробное кодирование** цифрового сигнала.

Целочисленное кодирование осуществляется в соответствии с алгоритмом

$$x_u(n) = x_{\text{кв}}(n)/Q = [x(n)/Q]_{\text{цч}} = i_{(2)}. \quad (1.10)$$

Разряды целочисленного кода $x_u(n)$ (рис. 1.17, а) имеют веса, убывающие от 2^{q_x} (старший знаковый разряд) до 2^0 (младший разряд); $q_x = q_{\text{ацп}} - 1$ – число разрядов или бит цифрового сигнала без учета знакового разряда.

Дробному кодированию, принятому в цифровой обработке сигналов, отвечает алгоритм

$$x_u(n) = [x(n)/Q]_{\text{цч}} / 2^{q_x} = i_{(2)} / 2^{q_x}. \quad (1.10')$$

Сигнал при этом не превышает по модулю 1: $-1 \leq x_u(n) < 1$, т. е. представляется правильной дробью; веса его разрядов убывают от 2^0 (знаковый разряд) до 2^{-q_x} (младший разряд) (рис. 1. 17, б).

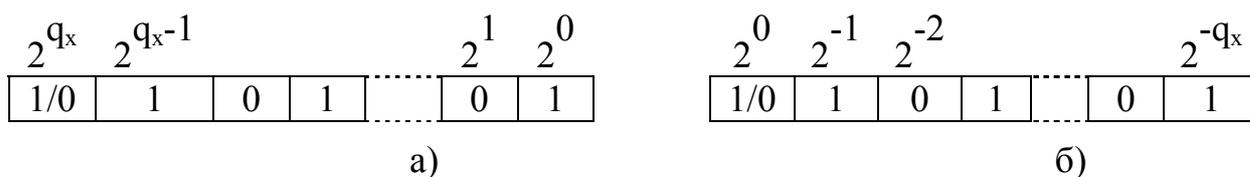


Рис. 1.17. Целочисленный (а) и дробный (б) форматы цифрового сигнала

1.9.2. ПОГРЕШНОСТЬ КВАНТОВАНИЯ ЦИФРОВОГО СИГНАЛА

Цифровой сигнал также характеризуется погрешностью квантования $e_u(n)$ или **цифровым шумом**, однозначно связанными с погрешностью квантования дискретного сигнала $e(n)$. При целочисленном кодировании $e_u(n) = e(n)/Q$, при дробном $e_u(n) = [e(n)/Q] 2^{-q_x}$. Дисперсия шума квантования цифрового сигнала, представленного правильной дробью, определяется как $D[e_u] = 2^{-2q_x} / 12$, среднеквадратическое значение $\sigma_{e_u} = 2^{-q_x} / \sqrt{12}$, предельное значение $E_{\text{ум}} = 2^{-q_x}$ при усечении и

$E_{um} = 2^{-q_x} / 2$ при округлении. Спектральная плотность мощности цифрового шума (при оговоренных выше условиях) $P_{e\alpha} = 2^{-2q_x} / (12f_d)$ обратно пропорциональна значению частоты дискретизации.

1.10. УСЛОВИЯ ВЫБОРА РАЗРЯДНОСТИ АЦП

Рассматриваемые условия и способы выбора разрядности АЦП основываются на различных допустимых соотношениях значений погрешности квантования и значений дискретного или цифрового сигналов, т. е. сигналов, отнесенных ко входу квантователя или к выходу АЦП. Для дискретных сигналов при этом учитываются характеризующие АЦП максимальный диапазон преобразуемых в код напряжений ($0 \div U_{np.max}$) или ($\pm U_{np.max}/2$) и шаг квантования по уровню $Q = U_{np.max} / 2^{q_{a\alpha}}$. Шаг квантования Q называют также **разрешением АЦП**, так как им определяются его чувствительность к малым изменениям преобразуемого сигнала и тот минимальный уровень входного сигнала $U_{np.min} = Q$, который может быть преобразован в цифровой код.

В соответствии с первым способом выбор разрядности осуществляется по допустимой относительной погрешности квантования сигнала, приведенной ко входу АЦП: максимальной $\delta_{xm} = E_m/x_{min}$ или среднеквадратической $\delta_{x\sigma} = \sigma_e/x_{min}$, где x_{min} – минимальное значение сигнала на входе АЦП, для которого оценивается относительная погрешность.

Учитывая, что $E_m = \eta Q$ ($\eta = 1$ или $1/2$), $\sigma_e = Q/\sqrt{12}$, можно найти необходимые значения шага квантования Q : $Q \leq \delta_{xm}x_{min}/\eta$ или $Q \leq \sqrt{12}\delta_{x\sigma}x_{min}$. По ним и определяется требуемая разрядность АЦП:

$$q_{a\alpha} \geq [\log_2(U_{np.max}/Q)]_{\text{цч}} + 1.$$

Для получения минимальной относительной погрешности квантования динамический диапазон сигналов на входе системы ЦОС ($x_{max} - x_{min}$) должен быть приведен к динамическому диапазону АЦП путем усиления сигнала в K_y раз: $K_y \leq U_{np.max}/x_{max}$.

Выбор разрядности АЦП по допустимой относительной погрешности квантования дискретного сигнала используется в измерительных системах ЦОС.

В соответствии со вторым способом разрядность АЦП находят из допустимого отношения R_p (дБ) мощности сигнала P_x к мощности шума квантования P_e на выходе АЦП [14, 39]:

$$R_p = 10 \lg \left(\frac{P_x}{P_e} \right) = 10 \lg \left(\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_{ey}^2} \right) = 20 \lg \sigma_{xy} - 10 \lg \left(\frac{2^{-2q_x}}{12} \right) =$$

$$= 20 \lg \sigma_{xy} + 20q_x \lg 2 + 10 \lg 12.$$

Учитывая, что $\lg 2 \approx 0,3$ и $\lg 12 \approx 1,079$, получаем $R_p, \text{ дБ} \approx 6q_x + 20 \lg \sigma_{xy} + 10,79$.

Как видим, добавление одного разряда АЦП увеличивает отношение сигнал/шум на 6 дБ. Если действующий на входе сигнал (речевой, музыкальный и др.) рассматривать как случайный с предельным значением $|x_{iy}|_{\max} = 1$, то его среднеквадратическое значение с высокой вероятностью может быть принято равным: $\sigma_{xy} \approx 1/(3 \dots 4)$. При $\sigma_{xy} = 1/3,5$ имеем

$$20 \lg \sigma_{xy} \approx -10,79 \text{ и } R_p, \text{ дБ} = 10 \lg(P_x/P_e) \approx 6q_x.$$

Так, значениям $q_x = 9, 11$ и 15 бит соответствуют отношения мощностей сигнала и шума квантования $R_p = 54, 66$ и 90 дБ.

Третьим возможным условием выбора разрядности АЦП является соизмеримость дисперсии σ_e^2 шума квантования $e(n)$ с дисперсией действующего совместно с входным сигналом внешнего дискретизированного шума $e_{ш}(n)$: $\sigma_e^2 \approx \sigma_{ш}^2$. Уменьшение шума квантования ниже этого порога путем увеличения числа двоичных разрядов АЦП не приводит к существенному уменьшению результирующего шума: $\sigma_{ш\Sigma}^2 = \sigma_e^2 + \sigma_{ш}^2$ (шумы полагаются независимыми) как и общего отношения сигнал/шум на выходе АЦП. Исходя из равенства $\sigma_e^2 = \frac{Q^2}{12} = \sigma_{ш}^2$, которому

соответствует шаг квантования $Q = \sqrt{12} \sigma_{ш} = \frac{U_{np.max}}{2^{q_{aцп}}}$, получаем соотношение для верхней целесообразной границы разрядности АЦП:

$$q_{aцп} \approx \left\{ \log_2 \left[U_{np.max} / (\sqrt{12} \sigma_{ш}) \right] \right\}_{цц} + 1.$$

Например, при $\sigma_{ш} \approx 0,04 U_{np.max}$ $q_{aцп} = 4$ бита. При малых отношениях сигнал/шум на входе АЦП, близких к единице, применимо весьма грубое квантование, вплоть до бинарного или знакового ($q_{aцп} = 1$ бит). Оно широко используется в радиотехнических измерительных системах [45]. Чем меньше разрядность АЦП, тем проще его реализация (при бинарном квантовании – это ограничитель или компаратор), тем выше быстродействие и общая достигаемая скорость цифровой обработки сигнала.

ОДНАКО НАИБОЛЕЕ ОБЩИЕ ОЦЕНКИ НЕОБХОДИМОЙ РАЗЯДНОСТИ АЦП НАХОДЯТСЯ ПО ДОПУСТИМОМУ УРОВНЮ ШУМА КВАНТОВАНИЯ АЦП В ВЫХОДНОМ СИГНАЛЕ СИСТЕМЫ ЦОС МЕТОДАМИ, КОТОРЫЕ РАССМАТРИВАЮТСЯ В ГЛАВЕ 4.

1.11. ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АНАЛОГ–КОД

С преобразованием аналогового сигнала в цифровой наряду со случайной методической погрешностью квантования связаны также **систематические инструментальные погрешности**, знание и учет которых особенно важны для измерительных систем ЦОС. Основными источниками систематической погрешности являются:

интегральная и дифференциальная нелинейность амплитудных характеристик АЦП;

отличие коэффициента передачи АЦП от единицы;

неточность, нестабильность и частотная зависимость коэффициентов передачи аналогового ФНЧ, нормализующего усилителя и УВХ, включая и свойственную УВХ погрешность хранения;

постоянное смещение и дрейф нуля, в том числе и АЦП.

Погрешность за счет нелинейности амплитудной характеристики АЦП [7] проявляется в изменении спектра цифрового сигнала. Она оценивается путем его дискретного преобразования Фурье при воздействии на входе АЦП одного или двух смещенных по частоте калиброванных гармонических сигналов. Интегрально погрешность может выражаться через коэффициенты гармоник или интермодуляционных искажений и приближенно учитываться как результат наложения на сигнал, действующий на входе квантователя АЦП, некоторой внутренней помехи, искажающей мгновенные значения сигнала, который преобразуется в код с помощью идеального АЦП с линейной амплитудной характеристикой.

О систематической погрешности преобразования аналог–код можно судить по степени соответствия мгновенного значения сигнала $\tilde{x}_{ex}(nT_d)$ $= \tilde{x}_{ex}(t) \big|_{t=nT_d}$ на входе системы ЦОС, оцененного, т. е. измеренного по коду АЦП $x_u(n)$, и его точного значения $x_{ex}(nT_d) = x(t) \big|_{t=nT_d}$. Оценка мгновенного значения входного сигнала по целочисленному коду АЦП, представленному в десятичной системе, выполняется в соответствии с алгоритмом

$$\tilde{x}_{ex}(n) = \tilde{x}_u(n) Q/K.$$

В этом выражении Q – это известное значение шага квантования АЦП, т. е. значение единицы младшего разряда, выраженное в вольтах или милливольтках, а K – это известный номинальный коэффициент передачи сигнального тракта от входа системы до входа квантования АЦП. Он представляет собой произведение номинальных коэффициентов передачи элементов этого тракта: усилителя, фильтра, УВХ и АЦП: $K = K_u K_\phi K_{УВХ} K_{АЦП}$. Пренебрегая операцией квантования, которая приводит к случайной погрешности, полученную оценку мгновенного значения входного сигнала

можно выразить в виде, учитывающем входящие в нее аддитивные и мультипликативные составляющие погрешности:

$$\tilde{x}_{ex}(n) = [x_{ex}(n) + \Delta x_o + \Delta x_n] \tilde{K} / K.$$

Составляющие Δx_o и Δx_n здесь соответствуют приведенным ко входу системы значениям смещения нуля (Δx_o) и помехи нелинейности (Δx_n), а через \tilde{K} обозначен фактический, не известный нам коэффициент передачи сигнального тракта, также равный произведению фактических коэффициентов передачи его элементов:

$$\tilde{K} = \tilde{K}_y \tilde{K}_\phi \tilde{K}_{увх} K_{АЦП}.$$

Далее переходим к систематической погрешности в соответствии с ее общим определением:

$$\Delta x_c(n) = \tilde{x}_{ex}(n) - x_{ex}(n) = x_{ex}(n) [(\tilde{K} - K) / K] + (\Delta x_o + \Delta x_n) \tilde{K} / K.$$

Обозначая через $\Delta K = \tilde{K} - K$ погрешность коэффициента передачи и принимая приближенно отношение $\tilde{K} / K \approx 1$, получаем выражение для абсолютной систематической погрешности:

$$\Delta x_c(n) = x_{ex}(n) \tilde{K} / K + \Delta x_o + \Delta x_n. \quad (1.12)$$

Отнеся ее к некоторому заданному мгновенному значению входного сигнала $x_{ex}(n)$, приходим к расчетному соотношению для относительной систематической погрешности:

$$\delta_c = \Delta x_c(n) / x_{ex}(n) = \Delta K / K + \Delta x_o / x_{вх}(n) + \Delta x_n / x_{вх}(n). \quad (1.13)$$

Входящая в (1.12), (1.13) относительная погрешность коэффициента передачи $\Delta K / K$ складывается из относительных погрешностей коэффициентов передачи элементов сигнального тракта:

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta K_y}{K_y} + \frac{\Delta K_\phi}{K_\phi} + \frac{\Delta K_{увх}}{K_{увх}} + \frac{\Delta K_{АЦП}}{K_{АЦП}}.$$

Выражение (1.13) позволяет рассчитать относительную систематическую погрешность подсистемы аналогового ввода по известным относительным погрешностям ее элементов (фильтра, усилителя, УВХ, АЦП) или решить обратную задачу: по заданному допустимому значению относительной систематической погрешности δ_c сформулировать требования к точности элементов сигнального тракта, необходимые для его разработки.

1.12. УСЛОВИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ АДЕКВАТНОСТИ ДИСКРЕТНОГО И ЦИФРОВОГО СИГНАЛОВ

Цифровой сигнал, как и цифровая система, осуществляющая его обработку (процессор ЦОС), имеют конечную разрядность и, следовательно, конечную точность представления и обработки чисел. Ввиду сложности математического описания цифровых сигналов и систем конечной разрядности в теории ЦОС используют **идеализированные модели цифрового сигнала и цифровой системы неограниченной точности (разрядности), которые математически адекватны соответственно дискретному сигналу и дискретной системе** [11, 14, 15, 18, 40]. Условия адекватности (символ $\underline{\Delta}$) записываются следующим образом:

$$x(n) \underline{\Delta} x_u(n) \text{ при } q_x \rightarrow \infty; \quad \Phi[x(n)] \underline{\Delta} \Phi_u[x_u(n)] \text{ при } q_R \rightarrow \infty,$$

где q_x и q_R – разрядности цифрового сигнала и процессора ЦОС;

$\Phi[\cdot]$ и $\Phi_u[\cdot]$ – операторы обработки дискретной и цифровой систем, которые математически адекватны при большой разрядности процессора ЦОС.

Влияние же конечной разрядности цифровых сигналов и систем учитывают отдельно в виде погрешности обработки реальной системы ЦОС по отношению к ее точной дискретной модели методами, изложенными в главе 4.

1.13. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛА ИЗ ЦИФРОВОЙ ФОРМЫ В АНАЛОГОВУЮ

При преобразовании цифрового сигнала в аналоговый на выходе ЦАП формируется аналоговый квантованный сигнал $\hat{y}(t)$ в виде последовательности примыкающих друг к другу прямоугольных импульсов длительностью T_d , модулированных по амплитуде значениями выходного цифрового сигнала $y_u(nT_d)$ (рис. 1.18). Ступенчатый сигнал $\hat{y}(t)$ совпадает с откликом фильтра-интерполятора нулевого порядка на дискретные сигналы $y(n)$ или $y_d(t)$, математически адекватные цифровому сигналу $y_u(n)$.

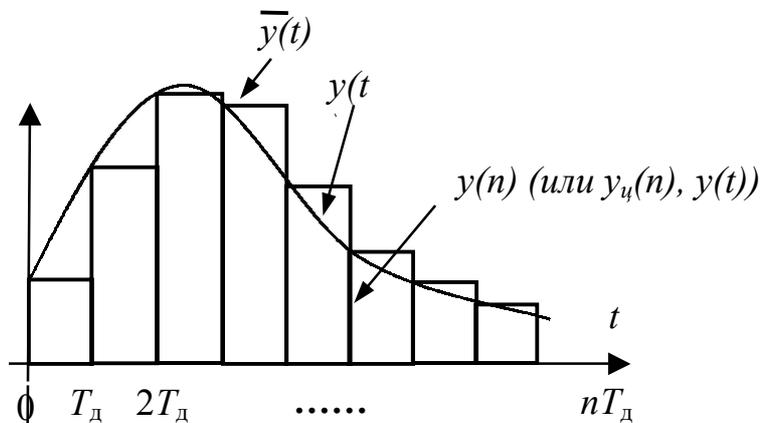


Рис. 1.18. Преобразование цифрового сигнала в аналоговый

Это позволяет заместить ЦАП его линейной моделью из последовательно соединенных преобразователя цифрового сигнала в дискретный и фильтра-интерполятора нулевого порядка (рис. 1.19). Отклик такой модели на единичный цифровой или дискретный импульс: $u_o(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n=0; \\ 0, & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$ (рис. 1.20, а) является импульсной характеристикой ЦАП в виде прямоугольного импульса $П_{T_d}(t)$ единичной амплитуды длительностью T_d :

$$h_{\text{цап}}(t) = \Phi_{\text{цап}}[u_o(n)] = П_{T_d}(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 - T_d; \\ 0, & t \neq 0 - T_d \end{cases} \quad (\text{рис. 1.20, б}).$$

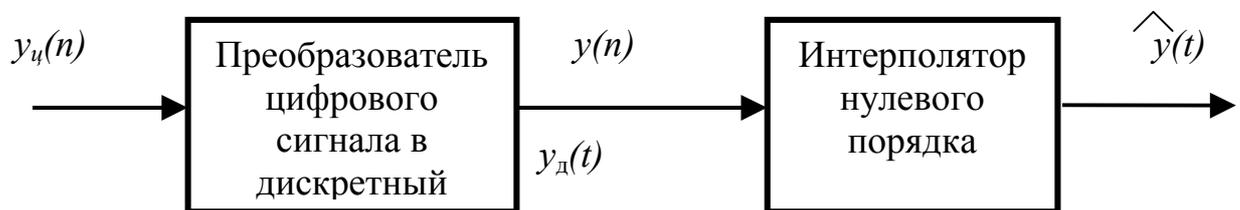


Рис. 1.19. Модель ЦАП

Преобразование Фурье от импульсной характеристики определяет частотную характеристику ЦАП, соответствующую частотной характеристике фильтра-интерполятора нулевого порядка:

$$H_{\text{цап}}(j\omega) = \int_0^{\infty} П_{T_d}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = T_d e^{-jx} (\sin x)/x = T_d e^{j\varphi(\omega)} |H_{\text{цап}}(j\omega)|, \quad (1.14)$$

где $\varphi(\omega) = -\omega T_d/2$ и $|H_{\text{цап}}(j\omega)| = |\sin(\omega T_d/2)/(\omega T_d/2)|$ – фазочастотная (ФЧХ) и амплитудно-частотная (АЧХ) характеристики ЦАП; $x = \omega T_d/2$.

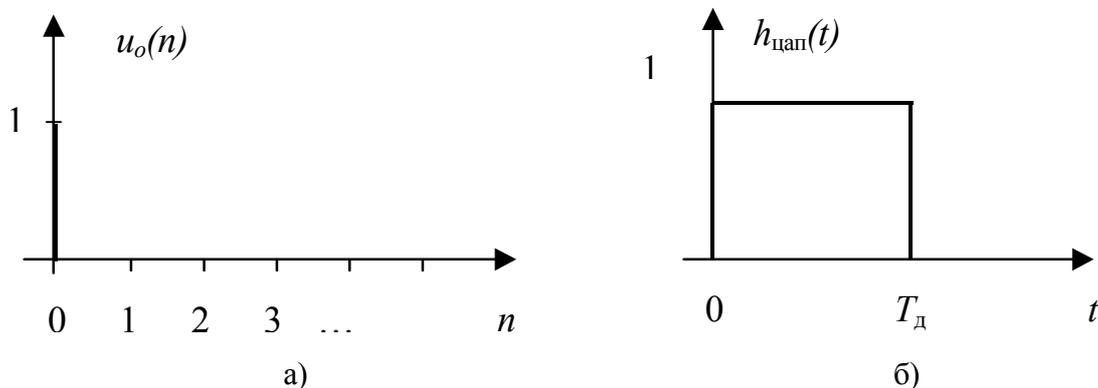


Рис. 1.20. Единичный импульс (а) и импульсная характеристика ЦАП (б)

На частоте $\omega = 0$ $|H_{\text{цап}}| = 1$, на частотах $\pm\omega_d/2$ $|H_{\text{цап}}| = 2/\pi \approx 0,65$, на частотах $\omega_k = k\omega_d$, $k = 1, 2, \dots$ $|H_{\text{цап}}| = 0$. График АЧХ показан на рис.1.21.

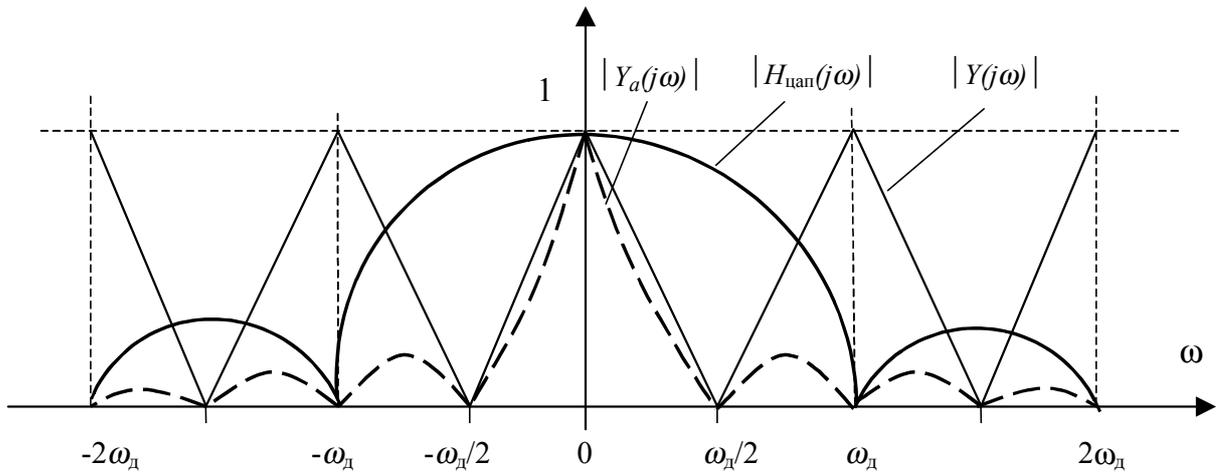


Рис. 1.21. Частотная характеристика ЦАП $H_{\text{цАП}}(t)$ и преобразования спектра при цифро-аналоговом преобразовании

Отличие частотной характеристики ЦАП от прямоугольной частотной характеристики идеального восстанавливающего ФНЧ с частотой среза $\omega_d/2$ приводит к искажениям сигнала, восстанавливаемого ЦАП.

Сигнал на выходе ЦАП можно описать сверткой дискретного сигнала $y_d(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) \delta(t - nT_d)$, математически адекватного преобразуемому цифровому сигналу $y_u(n)$, с импульсной характеристикой $h_{\text{цАП}}(t)$:

$$\hat{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} y(\tau) \delta(\tau - nT_d) \Pi_{T_d}(t - \tau) d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) \Pi_{T_d}(t - nT_d).$$

Спектр выходного сигнала ЦАП определяется произведением его частотной характеристики и спектра преобразуемого дискретного сигнала $Y(j\omega)$ (рис. 1.21):

$$\hat{Y}(j\omega) = e^{j\varphi(\omega)} |H_{\text{цАП}}(j\omega)| Y(j\omega). \quad (1.15)$$

Он отличается от спектра восстанавливаемого аналогового сигнала $Y_a(j\omega) = T_d Y(j\omega)$, совпадающего со спектром дискретного сигнала в основной полосе $\pm\omega_d/2$. Степень их отличия и определяет искажения сигнала, вносимые ЦАП. Искажения ЦАП обусловлены неравномерностью его АЧХ в основной полосе $\pm\omega_d/2$ и недостаточным подавлением высокочастотных полос периодически повторяющегося спектра дискретного сигнала за ее пределами.

Высокочастотные искажения сигнала $\hat{y}(t)$, проявляющиеся в форме ступенек, ослабляются сглаживающим аналоговым фильтром с частотой среза $\omega_c \leq \omega_d/2$. Отличие выходного сигнала фильтра $y_{\text{вых}}(t)$ от точного

аналогового сигнала $y(t)$, т.е. результирующая погрешность восстановления, определяется произведением $H_{\text{ЦАП}}(j\omega)H_{\Phi}(j\omega)$ частотных характеристик ЦАП и сглаживающего фильтра.

Количественно погрешность восстановления $\Delta y(t) = y_{\text{вых}}(t) - y(t)$ можно оценить аналогично методической погрешности дискретизации сигнала ее предельным значением $|\Delta y(t)|_{\text{max}}$ или интегральным (1.8):

$$\varepsilon = \{E[\Delta y(t)]/E[y(t)]\}^{1/2} = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \Delta y^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt} \right]^{1/2} = \left[\frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(j\omega)H_{\text{ЦАП}}(j\omega)H_{\Phi}(j\omega) - Y(j\omega)P_{\omega_d/2}(j\omega)|^2 d\omega}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(j\omega)P_{\omega_d/2}(j\omega)|^2 d\omega} \right]^{1/2}.$$

Выбором аналогового фильтра высокого порядка с частотной характеристикой, имеющей подъем на границах полосы пропускания и большое затухание за ее пределами, можно обеспечить компенсацию частотной характеристики ЦАП в полосе пропускания и общие малые искажения восстанавливаемого сигнала. Иногда также с целью уменьшения частотных искажений в основной полосе вводят предискажения в частотную характеристику цифрового фильтра, выходной сигнал которого подлежит восстановлению.

Требуемые параметры сглаживающего фильтра, зависящие от отношения частоты дискретизации к максимальной частоте спектра преобразуемого (восстанавливаемого) сигнала, аналогичны параметрам противомаскировочного ФНЧ на входе АЦП (см. п. 1.2.6). Высокое качество восстановления сигнала достигается в современных системах ЦОС без усложнения аналогового сглаживающего фильтра путем повышения частоты дискретизации восстанавливаемого цифрового сигнала и интерполяции его цифровым интерполирующим фильтром [38, 44].

На выходе ЦАП можно сформировать также сигнал $\hat{y}(t)$ с длительностью модулированных по амплитуде импульсов $\tau_o < T_d$. Для этого достаточно обеспечить сброс регистра данных ЦАП в моменты времени $t = nT_d + \tau_o$. Такому ЦАП соответствует импульсная характеристика $P_{\tau_o}(t)$ и частотная характеристика вида:

$$H_{\text{ЦАП}}(j\omega) = \tau_o e^{-jx} (\sin x)/x, \text{ где } x = \omega\tau_o/2.$$

Ширина главного лепестка ее составляет $\pm 2\pi/\tau_o$, а частоты нулей $\omega_k = k2\pi/\tau_o$. Например, при $\tau_o = T_d/2$ $\omega_k = 2k\omega_d$; частота первого нуля при этом равна $2\omega_d$. Используя на выходе ЦАП полосовой аналоговый фильтр, можно выделить любую полосу спектра дискретного (цифрового) сигнала, как правило, ближайшую к основной (например полосу $\pm(\omega_d - \omega_d/2)$). В результате одновременно с восстановлением возможен перенос или смещение по частоте спектра аналогового сигнала.

В заключение полезно обратить внимание на дуальность преобразований сигнала из цифровой формы в аналоговую и из аналоговой в цифровую, как и на подобие их математических описаний.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие преобразования сигналов имеют место в системе цифровой обработки аналоговых сигналов?
2. Что такое дискретный сигнал и дискретная последовательность?
3. В чем заключаются взаимосвязь и отличие спектров дискретного и аналогового сигналов?
4. Можно ли по известному спектру дискретного сигнала найти спектр соответствующего ему аналогового сигнала?
5. Как по известному спектру аналогового сигнала определить спектр соответствующего ему дискретного сигнала?
6. В чем заключается и как проявляется наложение спектров при дискретизации сигналов?
7. Из каких условий выбирается частота дискретизации аналоговых сигналов?
8. Каким образом могут быть уменьшены искажения, связанные с дискретизацией сигнала?
9. Покажите, как преобразуется спектр периодического сигнала при дискретизации с частотой, меньшей частоты сигнала?
10. Что такое апертурная погрешность УВХ и АЦП?
11. Как изменяется спектр сигнала при цифроаналоговом преобразовании?
12. Как зависят искажения восстановления сигнала от частоты дискретизации и максимальной частоты его спектра в основной полосе?
13. Какова математическая модель квантования сигнала по уровню, т. е. алгоритм преобразования дискретного сигнала в дискретный квантованный?
14. Как определяется погрешность квантования дискретного квантованного сигнала?
15. Каков алгоритм преобразования дискретного квантованного сигнала в цифровой (алгоритм цифрового кодирования)?

16. При каком условии цифровой и дискретный сигналы математически адекватны?

17. Как выражаются погрешности квантования для цифрового сигнала, представленного в дробном формате?

18. Как определяется автокорреляционная функция и спектральная плотность шума квантования АЦП?

19. Из каких условий выбирается необходимая разрядность АЦП?

20. На сколько изменяется отношение мощности сигнала к мощности шума квантования при увеличении разрядности АЦП на 1 бит?

2. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ НА ОСНОВЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ И ДИСКРЕТНОЙ ВРЕМЕННОЙ СВЕРТКИ

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Дискретной по определению называется система, осуществляющая обработку дискретных сигналов. В данном случае понятия **дискретная система** и **дискретный сигнал** используются как **синонимы и математические модели цифровой системы и цифрового сигнала** с неограниченной разрядностью и точностью обработки.

Дискретная система, как и аналоговая, полностью определяется **математическим оператором**, устанавливающим связь между ее выходным и входным сигналами или последовательностями: $y(n) = \Phi[x(n)]$, $y(t) = \Phi_a[x(t)]$. **Оператор системы, реализуемый аппаратными или программными средствами, называют алгоритмом обработки системы.** По виду оператора дискретные системы классифицируются на линейные и нелинейные, инвариантные и неинвариантные ко времени. **В данном учебном пособии рассматриваются алгоритмы цифровой фильтрации, которым соответствуют линейные дискретные системы с постоянными параметрами (или коэффициентами).** Они удовлетворяют принципам суперпозиции:

$$y(n) = \Phi[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1\Phi[x_1(n)] + a_2\Phi[x_2(n)]$$

(отклик системы на сумму воздействий равен сумме откликов на каждое воздействие) и инвариантности к временному сдвигу, т. е. независимости отклика от момента приложения воздействия:

$$y(n - m) = \Phi[x(n - m)],$$

где $x(n - m)$, $y(n - m)$ – последовательности, задержанные (или сдвинутые вправо) относительно $x(n)$ и $y(n)$ на m отсчетов или периодов дискретизации T_d .

2.2. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ И АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НА ИХ ОСНОВЕ

Аналоговые линейные системы во временной области математически описываются дифференциальными уравнениями и интегралом свертки [1]:

$$\sum_{k=0}^M a_k [d^k y(t) / dt^k] = \sum_{l=0}^N b_l [d^l x(t) / dt^l], \quad (2.1)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.2)$$

где $h(t)$ – импульсная характеристика, являющаяся реакцией аналоговой системы на сигнал типа дельта-импульс: $h(t) = \Phi_a[\delta(t)]$.

В дискретных системах аналогом дифференциального уравнения (2.1) является **разностное уравнение**:

$$\sum_{k=0}^M a_k y(n - k) = \sum_{l=0}^N b_l x(n - l). \quad (2.3)$$

В нем, как и в дифференциальном уравнении (2.1), M обозначает порядок уравнения ($M \geq N$), a_k , b_l – его весовые коэффициенты; $x(n - l)$, $y(n - k)$ – входной и выходной сигналы системы, задержанные на l и k отсчетов или периодов дискретизации.

Разностное уравнение может быть получено, в частности, дискретизацией по времени дифференциального уравнения с помощью замен вида:

$dx \rightarrow x(n) - x(n - 1)$ – первая разность и т. д. [50].

При $a_0 = 1$ разностное уравнение (2.3) приводится к виду:

$$y(n) = \sum_{l=0}^N b_l x(n - l) - \sum_{k=1}^M a_k y(n - k). \quad (2.4)$$

Устройство или программа, реализующие разностное уравнение (2.4) (т. е. выполняющие обработку сигнала в соответствии с разностным уравнением), называются дискретным или цифровым фильтром (ЦФ).

Сигнал на выходе цифрового фильтра равен сумме текущего отсчета входного сигнала $x(n)$ и предыдущих (N и M) отсчетов входного и выходного сигналов $x(n - l)$, $y(n - k)$, взвешенных (или взятых) с весовыми коэффициентами b_l , $-a_k$ (рис. 2.1). Достижимое в результате целенаправленное изменение формы, а следовательно, и спектра сигнала отвечает общей задаче частотной фильтрации сигналов.

При значениях коэффициентов $a_k \neq 0$ ЦФ называется **рекурсивным (РФ)**. Рекурсия означает наличие в фильтре обратной связи, т. е. зависимости выходного сигнала $y(n)$ от его предыдущих отсчетов $y(n - k)$ (рис. 2.1).

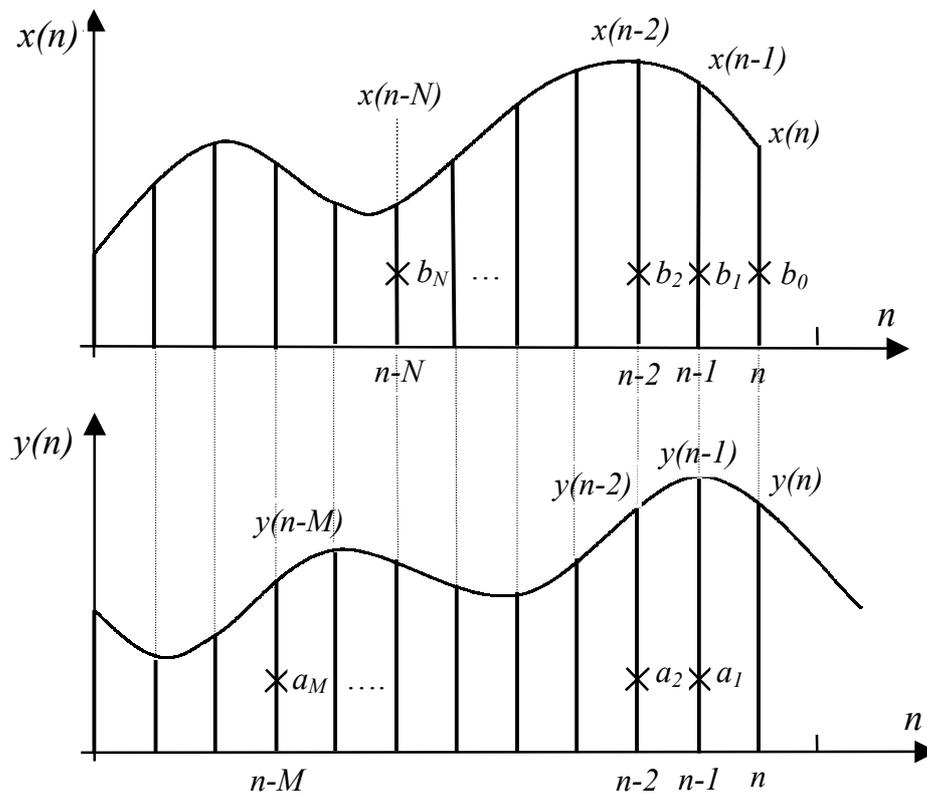


Рис. 2.1. Графическая иллюстрация обработки сигнала в соответствии с разностным уравнением

Разностному уравнению (2.4) с коэффициентами $a_k = 0$ соответствует **нерекурсивный фильтр (НФ)**:

$$y(n) = \sum_{l=0}^N b_l x(n-l). \quad (2.5)$$

Это фильтр без обратной связи, его выходной сигнал определяется взвешенной с весами b_l суммой текущего и N предыдущих отсчетов входного сигнала (рис. 2.1, верхний график). Уравнение (2.5) называют также алгоритмом скользящего весового усреднения (с нормирующим или без нормирующего множителя перед знаком суммы).

Аналогом интеграла свертки (2.2) в дискретных системах является **дискретная временная свертка (ДВС)**. Ее выражение получают с помощью замен: $t \rightarrow nT_d$, $\tau \rightarrow mT_d$, $d\tau \rightarrow 1$, $\int \rightarrow \sum$, т. е. дискретизацией (2.2):

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m). \quad (2.6)$$

Входящая в (2.6) дискретная функция $h(m)$ (или $h(n)$) называется **импульсной характеристикой дискретной системы**. Она определяется как отклик дискретной системы на сигнал типа **единичный импульс** $u_0(m) = 1$, $m = 0$ и $u_0(m) = 0$ при $m > 0$: $h(m) = \Phi[u_0(m)]$. Для физически реализуемой системы $h(m) = 0$ при $m < 0$ (отклик не может опережать воздействие); поэтому ДВС обычно представляют в виде:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m). \quad (2.7)$$

Возможны два вида импульсных характеристик ЦФ: бесконечной и конечной длительности (рис. 2.2).

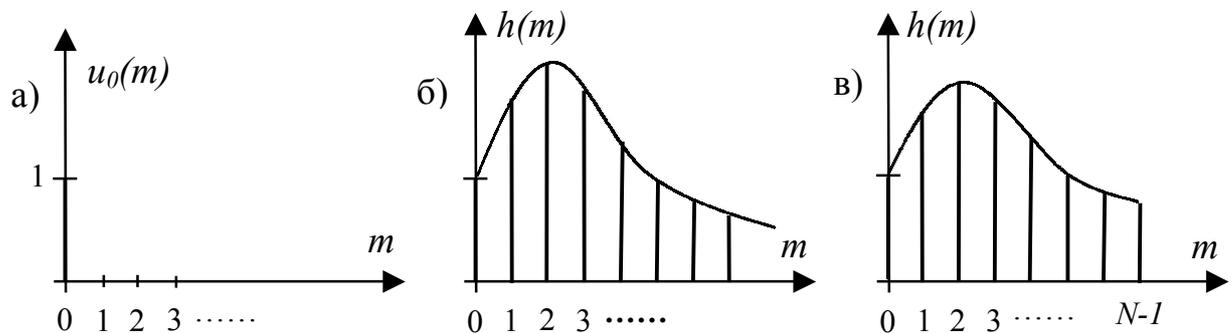


Рис. 2.2. Единичный импульс (а) и импульсные характеристики цифровых фильтров БИХ-типа (б) и КИХ-типа (в)

Бесконечную импульсную характеристику имеют рекурсивные фильтры, поэтому их часто называют также **БИХ-фильтрами** [15]. По импульсной характеристике можно судить об **устойчивости РФ**. Устойчивому РФ отвечает затухающая со временем импульсная характеристика, что математически выражается как $\sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| < \infty$.

Нерекурсивные цифровые фильтры относятся к классу КИХ-фильтров, т. е. фильтров с конечной импульсной характеристикой. Выражение ДВС (2.7) для НФ имеет конечные пределы суммирования, определяемые длиной импульсной характеристики N :

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m). \quad (2.8)$$

Это означает, что ДВС можно непосредственно использовать при реализации НФ в качестве алгоритма обработки, что невозможно для РФ вследствие бесконечности их импульсной характеристики и требуемого в связи с этим бесконечно большого объема вычислений.

Из сопоставления (2.5) и (2.8) следует, что значения импульсной характеристики в выражении ДВС (2.8) тождественны коэффициентам b_l в разностном уравнении НФ (2.5): $h(m) = b_l|_{m=l}$ и являются, таким образом, **коэффициентами НФ**. Поэтому, учитывая большое значение и

информативность свертки при описании дискретных сигналов и систем, принято говорить, что **НФ реализуют алгоритм цифровой фильтрации на основе ДВС (2.8)**, а **РФ – алгоритм на основе разностного уравнения в его общей форме (2.4)**.

2.3. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ СИГНАЛОВ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ (В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ)

Наиболее общим для аналоговых сигналов является операторный метод их описания на комплексной плоскости:

$$X_a(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt, \quad (2.9)$$

где $p = \sigma + j\omega$ – комплексный оператор Лапласа или комплексная частота [1].

Преобразованию Лапласа на мнимой оси $j\omega$ (оси частот) соответствует преобразование Фурье аналогового сигнала, определяющее его спектр:

$$X_a(j\omega) = X_a(p)|_{p=j\omega} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Для дискретных сигналов преобразование Лапласа получается из (2.9) с помощью замен: $t \rightarrow nT_d$, $\int \rightarrow \sum$, $dt \rightarrow 1$, т. е. дискретизацией (2.9) по времени:

$$X(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-pnT_d}. \quad (2.9')$$

Однако в отличие от аналоговых сигналов и систем преобразование (2.9') не приводит к рациональным функциям при математическом описании дискретных сигналов и систем на комплексной P -плоскости. Этому важнейшему условию отвечает **Z-преобразование** дискретных сигналов, определяемое соотношением

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} .$$

(2.10)

Комплексная переменная z в (2.10) связана с переменной p (оператором Лапласа):

$$z = e^{pT_d} = a + jb = e^{\sigma T_d} e^{j\omega T_d} .$$

(2.11)

Эта связь иллюстрируется отображениями точек из комплексной P -плоскости на комплексную Z -плоскость (рис. 2.3). Особенность этих отображений заключается в их цикличности по переменной ω , обусловленной периодичностью комплексной экспоненты $e^{j\omega T_d}$ с периодом ω_d :

$$z = e^{\sigma T_d} e^{j[\omega + k\omega_d]T_d}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \text{ и т. д.}$$

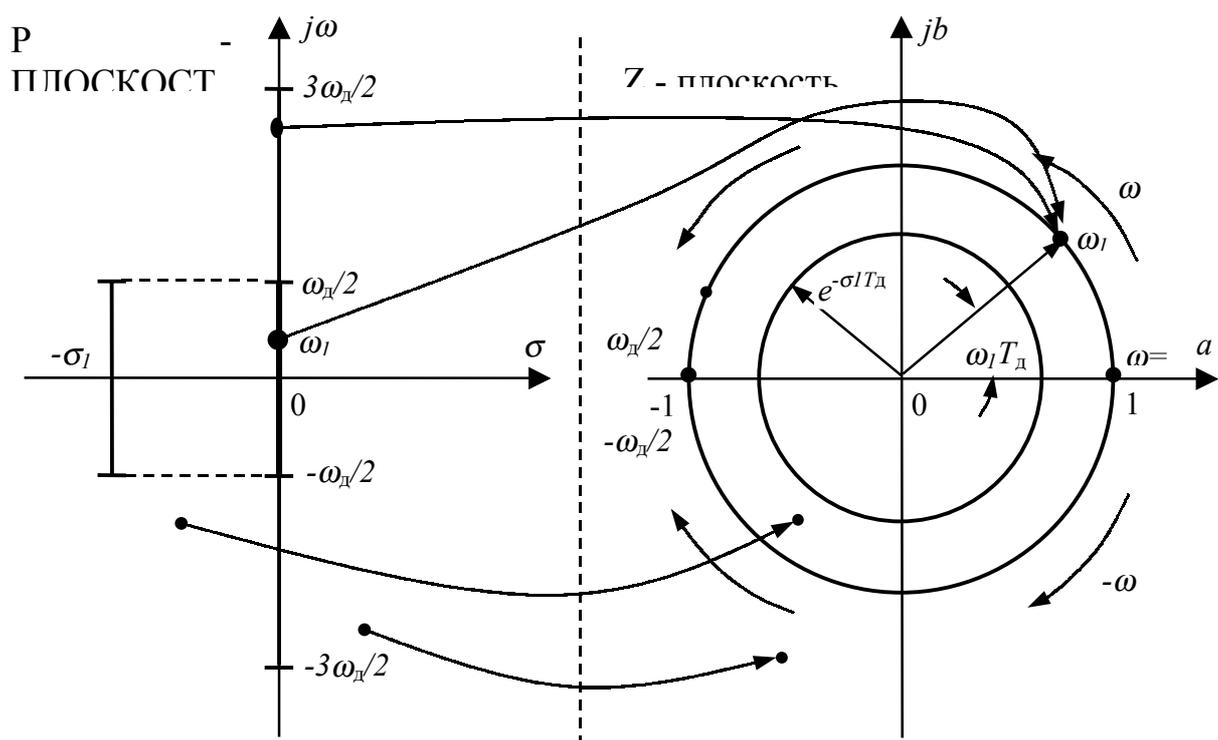


Рис. 2.3. Отображения точек с комплексной P -плоскости на Z -плоскость

Так, точки мнимой оси $j\omega$ P -плоскости ($\sigma = 0$) циклически переносятся на окружность единичного радиуса Z -плоскости; каждой полосе частот шириной ω_d при этом соответствует один обход этой окружности. Однозначное отображение точек имеет место в основной полосе частот $\pm\omega_d/2$. Левая P -полуплоскость ($\sigma < 0$) свертывается внутрь круга единичного радиуса Z -плоскости, а правая P -полуплоскость ($\sigma > 0$) отображается за его пределы.

Z -преобразование, вычисленное на единичной окружности, приводит к **преобразованию Фурье** дискретного сигнала (1.2), определяющему его спектр:

$$X(z)|_{z=e^{j\omega T_d}} = X(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n T_d}. \quad (2.12)$$

Следует отметить, что Z -преобразование, как и преобразование Лапласа, может быть односторонним – для последовательностей $x(n) = 0$ при $n < 0$, так и двусторонним, если $x(n) \neq 0$ при $n < 0$; в этом случае пределы суммирования по n берутся от $-\infty$ до $+\infty$ [17].

К наиболее важным относятся следующие свойства **Z -преобразования:**
линейности:

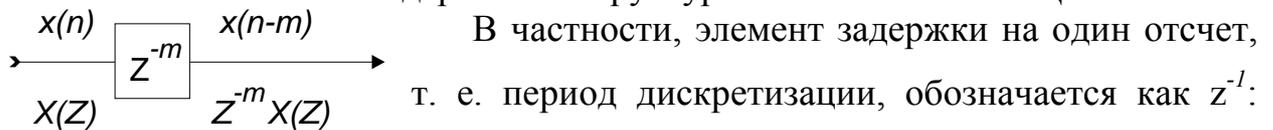
$$Z\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} = a_1X_1(z) + a_2X_2(z) \quad (2.13)$$

(Z -преобразование суммы равно сумме Z -преобразований);

задержки:

$$Z\{x(n-m)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)z^{-(n-m)}z^{-m} = z^{-m}X(z) \quad (2.14)$$

(Z -преобразование задержанного на m отсчетов дискретного сигнала $x(n-m)$ равно произведению Z -образа $X(z)$ незадержанного сигнала $x(n)$ на множитель задержки z^{-m} . Этим объясняется использование символа z^{-m} для обозначения элемента задержки на структурных схемах систем ЦОС:



$$Z\{x(n-1)\} = z^{-1}X(z);$$

свертки:

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m);$$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)z^{-(n-m)}z^{-m} = X_1(z)X_2(z) \quad (2.15)$$

(Z -преобразование свертки двух последовательностей равно произведению Z -преобразований этих последовательностей);

произведения:

$$y(n) = x_1(n)x_2(n); \quad Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v)X_2(v) \frac{dv}{v}$$

(2.16)

(Z -преобразование произведения двух последовательностей равно комплексной свертке Z -образов этих последовательностей, где v –

переменная интегрирования, C – контур интегрирования, охватывающий все особые точки подынтегральной функции).

На основе свойства (2.16) Z -преобразования произведения дискретных последовательностей доказывается важное для практики равенство Парсеваля, имеющее тот же смысл, что и для аналоговых сигналов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT_D)|^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)X(z^{-1})z^{-1}dz = \frac{T_D}{\pi} \int_0^{\omega_D/2} |X(j\omega)|^2 d\omega .$$

Оно означает тождественность временной и частотной оценок энергии сигнала.

Аналогичными свойствами обладает и преобразование Фурье дискретного сигнала.

Обратные Z и Фурье преобразования определяются выражениями:

$$x(n) = \frac{T_D}{2\pi} \int_{-\omega_D/2}^{\omega_D/2} X(j\omega)e^{j\omega nT_D} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\lambda)e^{j\lambda n} d\lambda, \quad (2.17)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz = \sum_i \text{res}_i [X(z)z^{n-1}]_{z=z_{pi}}. \quad (2.18)$$

Здесь обозначены: $\lambda = \omega T_D = 2\pi f/f_D$ – относительная частота, называемая также цифровой частотой; res – вычеты подынтегральной функции $F(z) = X(z)z^{n-1}$ в особых точках, охватываемых контуром C , по которому ведется интегрирование. Для дробно-рациональных функций $X(z) = P(z)/Q(z)$ такими особыми точками являются корни полинома $Q(z)$, называемые полюсами z_{pi} функции $X(z)$. Полюсы могут быть вещественными, комплексно-сопряженными, простыми и кратными. Вычеты в полюсах находятся с помощью выражений [17]:

для простого полюса

$$\text{res}_i [F(z)]_{z=z_{pi}} = \lim_{z \rightarrow z_{pi}} [(z - z_{pi})F(z)], \quad (2.19)$$

для полюса кратностью r

$$\text{res}_i [F(z)]_{z=z_{pi}} = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow z_{pi}} \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} [(z - z_{pi})^r F(z)]. \quad (2.20)$$

При $n=0$ к (2.18) добавляется дополнительный вычет $res_0[X(z)/z]_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0}[X(z)]$ в полюсе $z_{p0} = 0$, который дает множитель $1/z = z^{-1}|_{n=0}$.

Существуют специальные таблицы обратных Z -преобразований для широкого класса дискретных функций [16].

Особенности вычисления обратного Z -преобразования при различных способах представления подынтегральной функции $F(z)$ рассматриваются в п. 2.5.

Корни числителя $Q(z)$ дробно-рациональной функции, описывающей сигнал $X(z)$ ($Q(z)=0$), называются ее нулями. Отображение или представление нулей и полюсов на комплексной Z -плоскости используется в качестве геометрической интерпретации Z -образов дискретных сигналов.

2.4. ТЕСТОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Приводимые дискретные последовательности часто используются в системах ЦОС, в том числе в качестве их испытательных сигналов.

1. Единичный импульс: $u_0(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$. Имеет Z -образ $U_0(Z)=1$ и равномерный частотный спектр $U_0(j\omega)=1$. Для дискретных систем он имеет такое же значение, как и дельта-импульс для аналоговых. Откликом на него является импульсная характеристика дискретной системы.

2 Единичный импульс, задержанный на m отсчетов:

$$u_0(n-m) = \begin{cases} 1, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases}.$$

С учетом свойства задержки его Z и F (Фурье)-образы

$$Z\{u_0(n-m)\} = z^{-m}; \quad F\{u_0(n-m)\} = e^{-j\omega m T_d}.$$

С помощью $u_0(n-m)$ любая дискретная последовательность может быть

представлена в виде дискретной свертки: $x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)u_0(n-m)$.

3. Единичный скачок: $u_1(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$ (функция включения). Его Z -образ

$$U_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1/(1-z^{-1}) = z/(1-z)$$
 соответствует сумме бесконечного

числа членов геометрической прогрессии. Сигнал имеет один полюс $z_p=1$ и нуль $z_0=1$ в начале координат (рис. 2.4, а).

Выражение для спектра единичного скачка находится следующим образом:

$$\begin{aligned}
 U_1(j\omega) &= U_1(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_d}} = 1/(1 - e^{-j\omega T_d}) = \\
 &= 1/\left[e^{-j\omega T_d/2} \left(e^{j\omega T_d/2} - e^{-j\omega T_d/2} \right) \right] = e^{j(\omega T_d - \pi)/2} / [2 \sin(\omega T_d/2)]
 \end{aligned}$$

(при выводе использована формула Эйлера: $e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha$).

График модуля спектра $|U_1(j\omega)| = 1/2|\sin(\omega T_d/2)|$ показан на рис. 2.5, а. Откликом на сигнал $u_1(n)$ является переходная характеристика дискретной системы.

4. Прямоугольный импульс конечной длительности:

$$u_N(n) = 1, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad u_N(n) = 0 \quad \text{для других } n.$$

Его Z-образ $U_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = (1 - z^{-N})/(1 - z^{-1})$ равен сумме конечного

числа членов геометрической прогрессии, определяемой как

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} a^i = (1 - a^N)/(1 - a).$$

К этому же результату можно прийти,

представив сигнал $u_N(n)$ в виде $u_N(n) = u_1(n) - u_1(n - N)$, что в Z-области означает:

$$U_N(z) = U_1(z) - z^{-N}U_1(z) = (1 - z^{-N})/(1 - z^{-1}).$$

Сигнал имеет один полюс $z_p = 1$ и N нулей: $(1 - z^{-N}) = 0$, $z_{oi} = \sqrt[N]{1} = e^{j2\pi i/N}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, равномерно размещенных на единичной окружности (рис. 2.4, б).

Спектр импульса определяется выражением

$$\begin{aligned}
 U_N(j\omega) &= \left(1 - e^{-j\omega NT_d} \right) / \left(1 - e^{-j\omega T_d} \right) = \frac{e^{-j\omega NT_d/2} \left(e^{j\omega NT_d/2} - e^{-j\omega NT_d/2} \right)}{e^{-j\omega T_d/2} \left(e^{j\omega T_d/2} - e^{-j\omega T_d/2} \right)} = \\
 &= e^{-j\omega(N-1)T_d/2} \sin(\omega NT_d/2) / \sin(\omega T_d/2).
 \end{aligned}$$

График модуля спектра $|U_N(j\omega)| = |\sin(\omega NT_d/2) / \sin(\omega T_d/2)|$ показан на рис. 2.5, б. Он соответствует дискретной функции *sinc* и имеет следующие значения в характерных точках:

$$|U_N(j\omega)| = \begin{cases} N, & \omega = 0 \\ 0, & \omega = 2\pi i / NT_d = i\omega_d / N, i = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

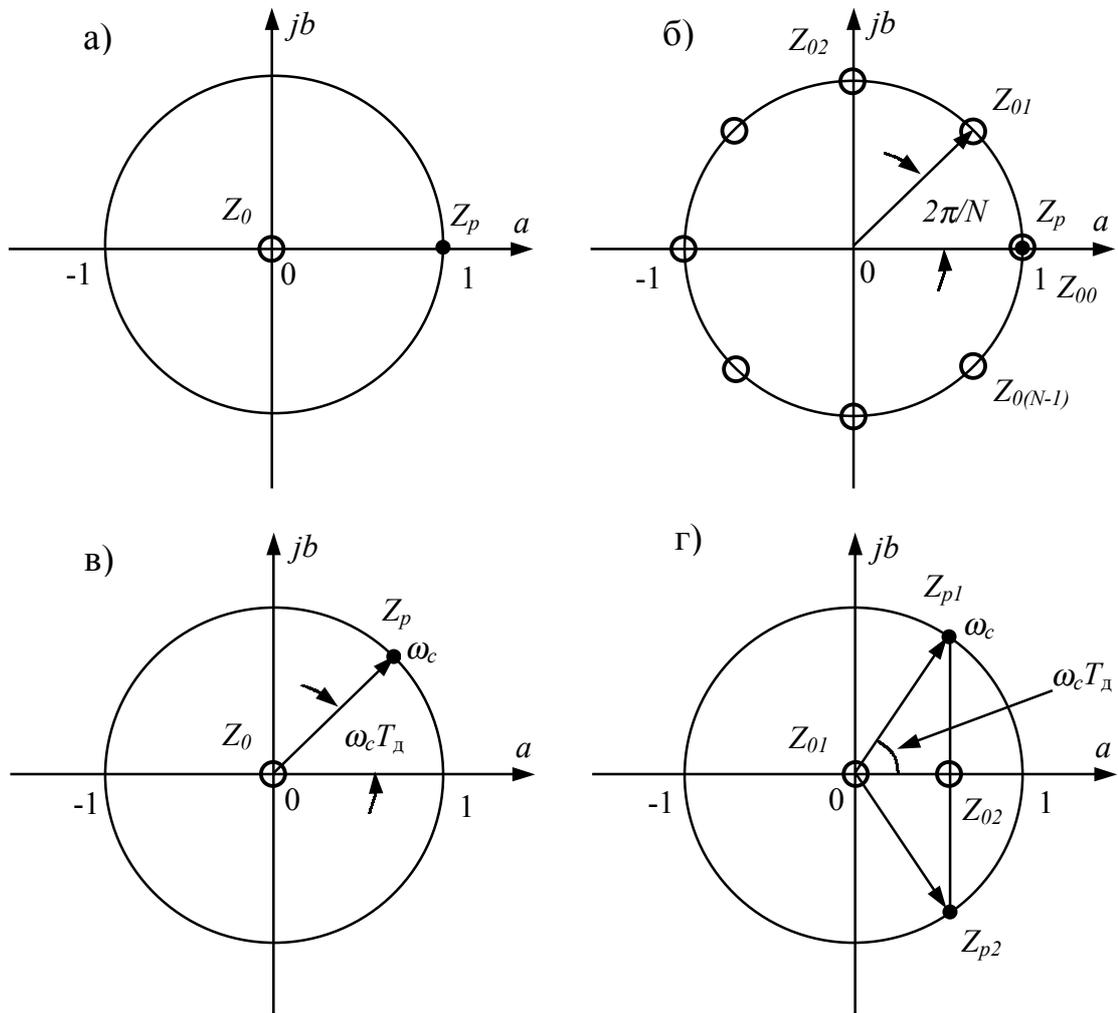


Рис. 2.4. Картины нулей и полюсов для дискретных сигналов типа единичный скачок (а), импульс конечной длительности (б), комплексный (в) и вещественный (г) радиоскачок

Сигнал 4 применяется для анализа переходных процессов в аperiodических дискретных системах.

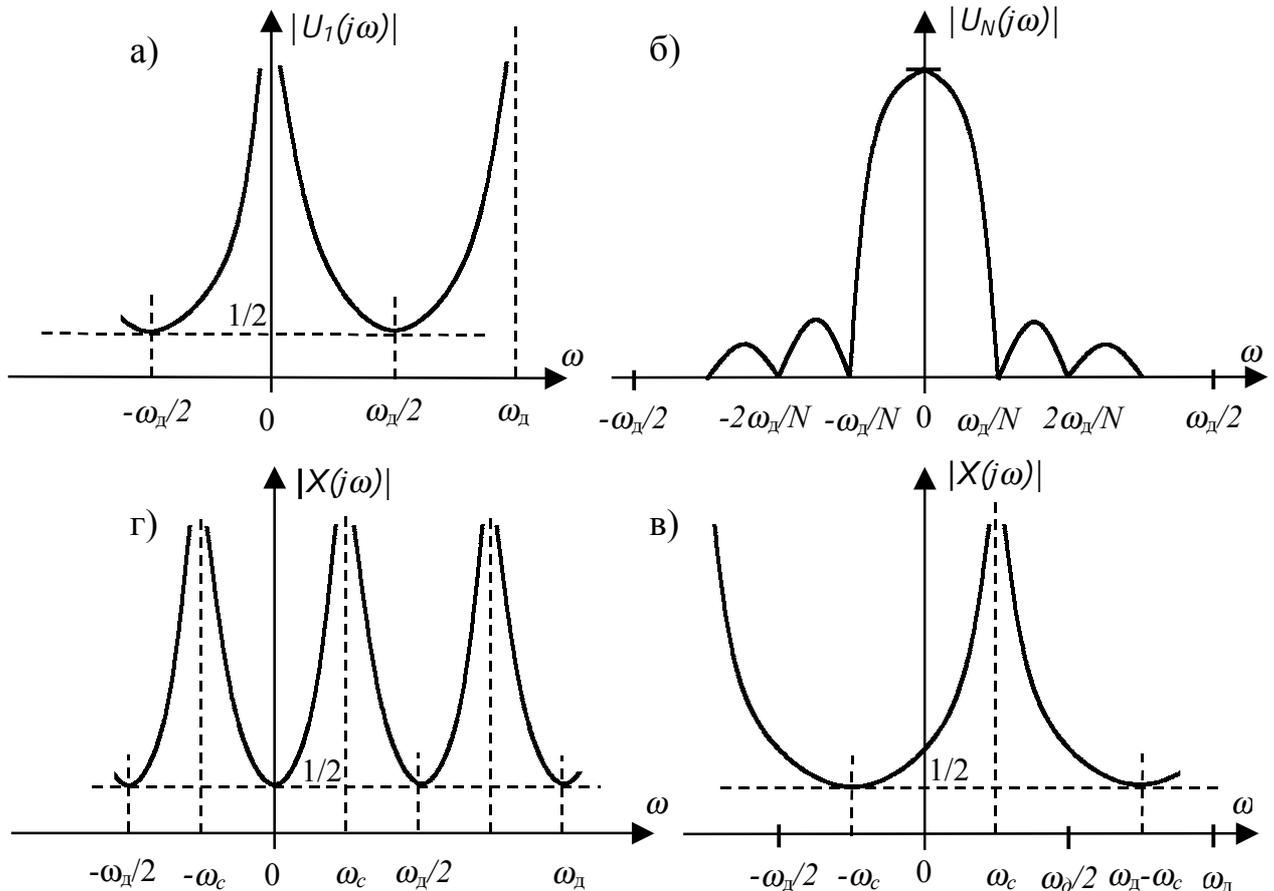


Рис. 2.5. Графики модулей спектров дискретных сигналов типа единичный скачок (а), импульс конечной длительности (б), комплексный (в) и вещественный (г) радиоскачок

5. Комплексный радиоскачок с частотой заполнения ω_c :

$$x(n) = e^{j\omega_c n T_d} = \cos(\omega_c n T_d) + j \sin(\omega_c n T_d), \quad n \geq 0;$$

Z-образ его, как и вещественного скачка, определяется суммой бесконечного числа членов геометрической прогрессии:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\omega_c n T_d} z^{-n} = 1 / (1 - e^{j\omega_c T_d} z^{-1}).$$

СИГНАЛ ИМЕЕТ ОДИН НУЛЬ $Z_0 = 0$ И ОДИН КОМПЛЕКСНЫЙ ПОЛЮС $z_p = e^{j\omega_c T_d}$ НА ЧАСТОТЕ ω_c (РИС. 2.4, В). СПЕКТР СИГНАЛА ОПИСЫВАЕТСЯ ВЫРАЖЕНИЕМ

$$X(j\omega) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_d}} = 1 / (1 - e^{j\omega_c T_d} e^{-j\omega T_d}) =$$

$$= e^{j[(\omega - \omega_c) T_d - \pi] / 2} / (2 \sin \frac{\omega - \omega_c}{2} T_d).$$

Модуль его $|X(j\omega)| = 1/2 | \sin(\omega - \omega_c)T_d / 2 |$ для $\omega_c = \omega_d/4$ показан на рис. 2.5, в.

6. Вещественный радиоскачок с частотой заполнения ω_c :

$$x(n) = \cos(\omega_c n T_d) = (e^{j\omega_c n T_d} + e^{-j\omega_c n T_d}) / 2, \quad n \geq 0.$$

Его Z- преобразование

$$X(z) = \frac{1/2}{1 - e^{-j\omega_c T_d} z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - e^{j\omega_c T_d} z^{-1}} = \frac{1 - \cos(\omega_c T_d) z^{-1}}{1 - 2 \cos(\omega_c T_d) z^{-1} + z^{-2}}$$

имеет пару комплексно-сопряженных полюсов $z_{p1,2} = e^{\pm j\omega_c T_d}$ и пару нулей $z_{o1} = 0$ и $z_{o2} = \cos(\omega_c T_d)$ (рис. 2.4, г).

СПЕКТР СИГНАЛА $X(j\omega) = X(z)|_{z=e^{j\omega T_d}} = \frac{1 - \cos(\omega_c T_d) e^{-j\omega T_d}}{1 - 2 \cos(\omega_c T_d) e^{-j\omega T_d} + e^{-j2\omega T_d}},$

взятый по модулю, показан на рис. 2.5, г для $\omega_c = \omega_d/4$.

Сигналы 5,6 используются для анализа переходных процессов и избирательности селективных дискретных систем.

7. Комплексный радиоимпульс конечной длительности NT_d :

$$x(n) = e^{j\omega_0 n T_d} = \cos(\omega_0 n T_d) + j \sin(\omega_0 n T_d), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Ему соответствует Z-образ

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n T_d} z^{-n} = (1 - e^{j\omega_0 N T_d} z^{-N}) / (1 - e^{j\omega_0 T_d} z^{-1})$$

и Фурье-преобразование

$$X(j\omega) = \frac{(1 - e^{-j(\omega - \omega_0) N T_d})}{(1 - e^{-j(\omega - \omega_0) T_d})} = e^{-j \frac{\omega - \omega_0}{2} (N-1) T_d} \frac{\sin \frac{\omega - \omega_0}{2} N T_d}{\sin \frac{\omega - \omega_0}{2} T_d}.$$

Спектр комплексного радиоимпульса и его график соответствуют спектру видеоимпульса 4, смещенному на частоту ω_0 (влево или вправо в зависимости от знака частоты ω_0).

8. Вещественный радиоимпульс конечной длительности NT_d :

$$x(n) = \cos(\omega_0 n T_d), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Его Z -образ и Фурье-преобразование могут быть представлены полусуммой Z -образов и спектров радиоимпульсов $e^{j\omega_0 n T_d}$ и $e^{-j\omega_0 n T_d}$:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n T_d} z^{-n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega_0 n T_d} z^{-n} = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{j\omega_0 N T_d} z^{-N}}{1 - e^{j\omega_0 T_d} z^{-1}} + \frac{1 - e^{-j\omega_0 N T_d} z^{-N}}{1 - e^{-j\omega_0 T_d} z^{-1}} \right); \\
 X(j\omega) &= \frac{1}{2} \left(e^{-j\frac{\omega - \omega_0}{2}(N-1)T_d} \frac{\sin \frac{\omega - \omega_0}{2} N T_d}{\sin \frac{\omega - \omega_0}{2} T_d} + e^{j\frac{\omega + \omega_0}{2}(N-1)T_d} \frac{\sin \frac{\omega + \omega_0}{2} N T_d}{\sin \frac{\omega + \omega_0}{2} T_d} \right).
 \end{aligned}$$

График модуля спектра можно получить путем смещения по частоте спектра видеоимпульса на $+\omega_0$ и $-\omega_0$ и суммирования смещенных спектров.

2.5. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ АНАЛОГОВОЙ СИСТЕМЫ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ ОТНОШЕНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА ЕЕ ВЫХОДНОГО И ВХОДНОГО СИГНАЛОВ: $H(p) = Y(p)/X(p)$. ОПЕРАТОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПИСЫВАЮЩИХ ТАКИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (2.1) И ИНТЕГРАЛА СВЕРТКИ (2.2) ДАЕТ ОБЩИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ АНАЛОГОВЫХ СИСТЕМ СООТВЕТСТВЕННО В ВИДЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ p :

$$H(p) = \frac{\sum_{l=0}^N b_l p^l}{\sum_{k=0}^M a_k p^k} = B(p) / A(p) \quad (2.21)$$

и в виде преобразования Лапласа импульсной характеристики системы $h(t)$:

$$H(p) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt. \quad (2.22)$$

Корням полиномов числителя $B(p) = 0$ и знаменателя $A(p) = 0$ передаточной функции (2.21) соответствуют нули p_{0i} и полюсы p_{pi} системы, через которые

передаточная функция представляется в так называемой нуль–поллюсной форме:

$$H(p) = C \prod_{i=1}^M (p - p_{0i}) / (p - p_{pi}), \quad (2.22)$$

где C – нормирующая константа.

ПО ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ АНАЛОГОВОЙ СИСТЕМЫ НЕПОСРЕДСТВЕННО НАХОДИТСЯ ЕЕ ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА:

$$H_A(j\omega) = Y(j\omega) / X(j\omega) = H(p) |_{p=j\omega},$$

которая в соответствии с (2.22) выражается и как Фурье-преобразование ее импульсной характеристики:

$$H_A(j\omega) = H(p) |_{p=j\omega} = \int_0^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Передаточной функцией дискретной системы называется отношение Z-образов выходного и входного сигналов системы:

$$H(Z) = Y(Z) / X(Z).$$

Конкретные ее выражения, получаемые Z-преобразованием разностных уравнений (2.3), (2.4) или (2.5), имеют при таком определении вид дробно-рациональной или целой рациональной функций. В результате решение разностного уравнения дискретной системы заменяется более простым решением алгебраических уравнений, описывающих ее передаточную функцию (аналогично операторному методу решения дифференциальных уравнений для аналоговых систем).

Из Z-преобразования левых и правых частей ДВС (2.7)

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h(m) x(n-m) z^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) z^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m) z^{-(n-m)} = H(z) X(z)$$

следует, что передаточная функция дискретной системы является Z -преобразованием ее импульсной характеристики:

$$H(z) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)z^{-m}, \quad (2.24)$$

Импульсная характеристика системы соответствует, в свою очередь, обратному Z -преобразованию (2.18) ее передаточной функции:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C H(z)z^{n-1} dz. \quad (2.25)$$

Частотная характеристика дискретной системы, определяемая отношением Фурье-образов выходного и входного сигналов, с учетом связи между Z и Фурье-преобразованиями (2.12) находится по передаточной функции системы $H(z)$ простой заменой z на $e^{j\omega T_d}$:

$$H(j\omega) = Y(j\omega) / X(j\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_d}}. \quad (2.26)$$

С учетом этой же связи из (2.24) следует, что частотная характеристика дискретной системы, как и аналоговой, является Фурье-преобразованием ее импульсной характеристики:

$$H(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n T_d}. \quad (2.27)$$

Легко заметить, что как Фурье-образы дискретных сигналов, так и частотные характеристики дискретной системы (2.26), (2.27) представляют собой функции относительной или нормированной частоты $\lambda = \omega T_d = 2\pi f / f_d$, называемой также цифровой частотой. Значениям круговой частоты ω в пределах $(0 \dots \omega_d)$ и $(-\omega_d/2 \dots \omega_d/2)$ соответствуют значения цифровой частоты λ в пределах $(0 \dots 2\pi)$ и $(-\pi \dots \pi)$. Частотная характеристика дискретной системы как функция цифровой частоты λ определяется выражениями:

$$H(j\lambda) = Y(j\lambda) / X(j\lambda) = H(z) \Big|_{z=e^{j\lambda}}, \quad (2.28)$$

$$H(j\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j\lambda n}. \quad (2.29)$$

Заданная таким образом частотная характеристика не зависит от значения частоты дискретизации ω_d , а соответствующая ей импульсная характеристика имеет период дискретизации $T_d = 1$.

Полезно и еще одно возможное представление частотной характеристики в виде отношения мгновенных значений выходного и входного комплексных гармонических сигналов системы в установившемся режиме:

$$H(j\omega) = y(n) / x(n) \quad \text{при } x(n) = e^{j\omega n T_d}.$$

Исходя из (2.27), (2.29) импульсную характеристику дискретной системы можно найти по ее известной частотной характеристике, воспользовавшись обратным преобразованием Фурье (2.17):

$$h(n) = \frac{T_d}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} H(j\omega) e^{j\omega n T_d} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(j\lambda) e^{j\lambda n} d\lambda \quad (2.30)$$

Модуль и аргумент частотной характеристики дискретной системы, представленной в показательной форме: $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$, обладают свойством соответственно четной и нечетной симметрии: $|H(j\omega)| = |H(-j\omega)|$ и $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$ и называются соответственно амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристиками системы. Это же относится и к реальной и мнимой частям комплексной частотной характеристики, первая из которых является четной функцией частоты, а вторая – нечетной.

Из определения частотной характеристики дискретной системы как преобразования Фурье импульсной характеристики (2.27), (2.29) следует также свойство ее периодичности с периодом по частоте ω_d или 2π (рис. 2.6). Оно присуще Фурье-преобразованиям любых дискретных последовательностей, в том числе спектрам дискретных сигналов.

Математически это объясняется периодичностью комплексной экспоненты $e^{j\omega nT_d} = e^{j(\omega+k\omega_d)nT_d} = e^{j(\lambda+2\pi k)n}$.

$$H(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j(\omega+k\omega_d)nT_d} = H[j(\omega+k\omega_d)]$$

или $H(j\omega) = H[j(\lambda+2\pi k)]$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

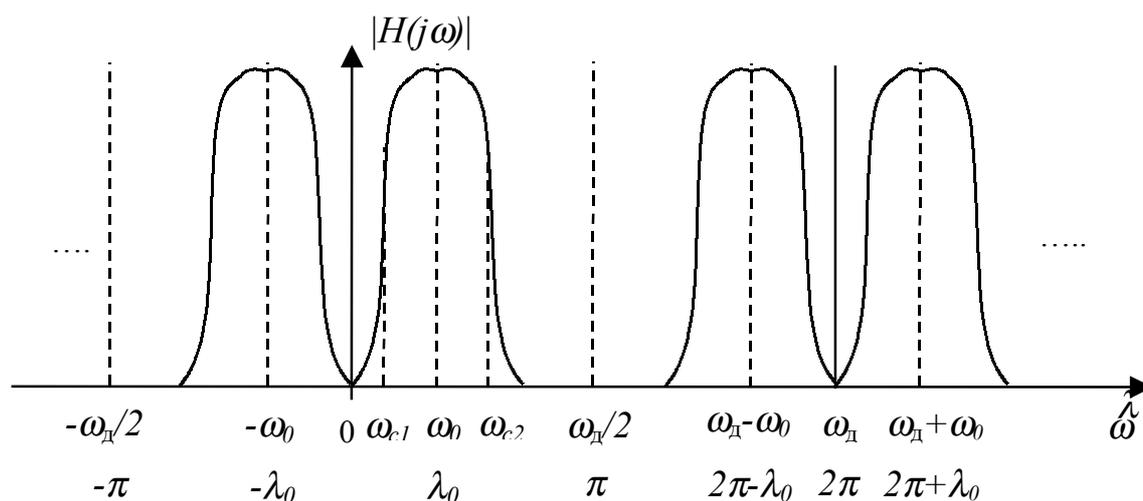


Рис. 2.6. Примерный вид АЧХ цифрового полосового фильтра

При математическом анализе и синтезе цифровых фильтров учитывается один период их частотной характеристики в основной полосе от 0 до $\pm\omega_d/2$. Требования к цифровым фильтрам и технические описания их характеристик приводятся, как и для аналоговых фильтров, только для реальных положительных частот, в данном случае в диапазоне $0 \dots \omega_d/2$.

Зависимость частотной характеристики цифрового фильтра от частоты дискретизации сигнала, отождествляемой с частотой дискретизации импульсной характеристики фильтра, является еще одной важной для понимания особенностью частотных свойств таких фильтров. Изменение частоты дискретизации с ω_d на ω'_d изменяет масштаб частотной характеристики $H(j\omega)$ по обоим осям в $\alpha = \omega'_d/\omega_d$ раз, пропорционально сжимая или растягивая частотную характеристику цифрового фильтра (это отвечает одному из свойств преобразования Фурье [1]). Частотной характеристике $H(j\omega') = \alpha H(j\alpha\omega)$ соответствуют новые значения граничных и

центральных частот цифрового фильтра ω'_i , связанные с их исходными значениями ω_i (например, ω_0 , ω_{c1} , ω_{c2} на рис. 2.6) соотношением $\omega'_i = \alpha \omega_i$. Следовательно, с изменением частоты дискретизации сигнала частотная характеристика цифрового фильтра автоматически перестраивается к новому значению частоты дискретизации.

Как показано выше, от абсолютного значения частоты дискретизации ω_d не зависит частотная характеристика цифрового фильтра, заданная функцией цифровой частоты λ : $H(j\lambda) = H(j\omega T_d)$. Это означает, что цифровой фильтр с центральной частотой λ_0 частотной характеристики $H(j\lambda)$ будет откликаться на дискретные сигналы с частотами $\omega_{0i} = \lambda_{0i} f_{di}$, соответствующими различным значениям частот дискретизации f_{di} этих сигналов.

Таким образом, периодичность, зависимость от частоты дискретизации и конечный верхний предел граничной частоты, равный $\omega_d/2$, принципиально отличают частотные характеристики цифровых фильтров и дискретных систем от аналоговых.

2.6. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ РЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Рекурсивный фильтр (РФ) реализует алгоритм обработки, описываемый разностным уравнением (2.4). Выполним Z -преобразование левых и правых частей (2.4), учитывая свойства линейности и задержки Z -преобразования (2.13), (2.14):

$$Y(z) = \sum_{l=0}^N b_l z^{-l} X(z) - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} Y(z).$$

Переходя к отношению $Y(Z)/X(Z)$, получим общее выражение для передаточной функции рекурсивного фильтра:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{l=0}^N b_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}. \quad (2.31)$$

Оно представляет отношение двух полиномов по степеням комплексной переменной z^{-1} . Его можно рассматривать также как произведение двух передаточных функций: $H_H(z) = B(z^{-1})$ – нерекурсивной части фильтра и $H_P(z) = 1/A(z^{-1})$ – рекурсивной части фильтра, т. е. $H(z) = H_H(z)H_P(z)$.

Выражение передаточной функции (2.31) относительно переменной z^{-1} , которая, как выше показано, отражает задержку на один период дискретизации, удобно тем, что по нему можно формально составить соответствующее передаточной функции разностное уравнение системы, определяющее ее алгоритм обработки.

Например, передаточной функции $H(z) = b_0 / (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})$ отвечает разностное уравнение $y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$. Очевидно, что столь же формальным способом, основанном на сопоставлении разностного уравнения (2.4) и передаточной функции (2.31), можно непосредственно записать выражение для передаточной функции системы по ее известному разностному уравнению, не прибегая, как выше, к его Z -преобразованию. Знание этой взаимосвязи полезно и для рассматриваемого далее структурного представления дискретных систем, которое может быть выполнено как по разностному уравнению, так и по передаточной функции.

В выражении (2.31) передаточной функции, как и разностного уравнения (2.3), предполагается, что порядок N полинома $B(z^{-1})$ не превышает порядка M полинома $A(z^{-1})$, определяющего порядок цифрового фильтра M , т. е. выполняется условие $N \leq M$. В случае $N > M$ передаточная функция (2.31), полученная по разностному уравнению (2.4), делением числителя на знаменатель приводится к сумме двух передаточных функций, первая из которых (частное) соответствует передаточной функции нерекурсивного

фильтра $(N - M)$ -го порядка, а вторая (остаток от деления) передаточной функции рекурсивного фильтра, порядок числителя которой всегда меньше M .

При анализе цифровых фильтров передаточную функцию (2.31) выражают также в виде отношения полиномов $B(z)$ и $A(z)$ по положительным степеням переменной Z . Для этого достаточно числитель и знаменатель (2.31) умножить на z^M :

$$H(z) = z^{M-N} \frac{\sum_{l=0}^N b_l z^{N-l}}{\sum_{k=0}^M a_k z^{M-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (2.32)$$

Множитель z^{M-N} при $N < M$ означает наличие $(M - N)$ нулевых корней числителя (при $N < M$ соответственно $(N - M)$ нулевых корней знаменателя), которые, ни на что не влияя, обеспечивают равенство корней числителя и знаменателя (т. е. числа нулей и полюсов, см. ниже).

Однако передаточная функция рекурсивного фильтра может быть получена не только из Z -преобразования разностного уравнения, но и непосредственно задана или синтезирована в виде отношения двух полиномов по положительным степеням переменной z :

$$H(z) = \left(\sum_{l=0}^N b_l z^{N-l} \right) / \left(\sum_{k=0}^M a_k z^{M-k} \right) \quad (2.33)$$

В данном случае выполнение условия $N \leq M$ является обязательным. Чтобы убедиться в этом, поделим числитель и знаменатель (2.33) на z^M :

$$H(z) = \frac{b_0 z^{N-M} + b_1 z^{N-M-1} + \dots + b_{N-M} z^0 + b_{N-M+1} z^{-1} + \dots + b_N z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}} \quad (2.34)$$

Выражению (2.34) соответствует следующее разностное уравнение:

$$y(n) = b_0x(n+N-M) + b_1x(n+N-M-1) + \dots + b_{N-M}x(n) + \dots + b_Nx(n-M) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2) - \dots - a_My(n-M).$$

По этому уравнению текущий отсчет выходного сигнала $y(n)$ вычисляется не только по текущему $x(n)$ и предыдущим $x(n-1)$ отсчетам входного сигнала, но и по $(N-M)$ его будущим, т. е. неизвестным отсчетам $x(n+N-M)$, $x(n+N-M-1)$, ..., $x(n+1)$, что практически невозможно. Таким образом, условие $N \leq M$, при котором степень числителя передаточной функции, заданной в форме (2.33), не превышает степень ее знаменателя, является одним из вариантов условия физической реализуемости дискретной системы.

Если в выражении (2.33) $N < M$, то соответствующее разностное уравнение будет иметь вид:

$$y(n) = b_0x(n+M-N) + b_1x(n+M-N-1) + \dots + b_Nx(n-M) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2) - \dots - a_My(n-M).$$

Здесь отсчеты входного сигнала $x(n)$, $x(n-1)$, ..., $x(n-M+N+1)$ не используются при вычислении $y(n)$, что равнозначно запаздыванию отклика фильтра на $(M-N)$ отсчетов.

Таким образом, передаточные функции рекурсивного фильтра в форме (2.32), (2.33) могут быть обобщенно представлены отношением двух полиномов $B(z)$ и $A(z)$ одинакового порядка $N=M$:

$$H(z) = \left(\sum_{l=0}^M b_l z^{M-l} \right) / \left(\sum_{k=0}^M a_k z^{M-k} \right) = B(z) / A(z). \quad (2.35)$$

Передаточные функции (2.32), (2.33) с $N < M$ приводятся к (2.35) приравниванием нулю коэффициентов b_l при $N < l \leq M$.

В приведенных выше вариантах полиномиальной формы передаточной функции коэффициенты полиномов b_0 и a_0 (при $l=k=0$) играют

масштабирующую роль (см. главу 4) и без потери общности могут быть положены равными единице.

По передаточной функции в форме (2.35) находятся ее нули и полюсы, играющие главную роль при синтезе и анализе рекурсивных фильтров.

Нули передаточной функции являются корнями числителя (2.35), т. е. значениями переменной z , обращающими в нуль полином $B(z)$:

$$B(z) = 0 \text{ при } z = z_{0i} = |z_{0i}| e^{j\omega_{0i}T_d} = |z_{0i}| e^{j\lambda_{0i}},$$

где $|z_{0i}|$ – модуль, ω_{0i} – круговая частота и λ_{0i} – цифровая частота нуля.

Полюсы соответствуют корням знаменателя передаточной функции

$$A(z) = 0 \text{ при } z = z_{pi} = |z_{pi}| e^{j\omega_{pi}T_d} = |z_{pi}| e^{j\lambda_{pi}};$$

$|z_{pi}|$, ω_{pi} , λ_{pi} – являются модулем, круговой и цифровой частотой полюса. Индекс i означает номер нуля и полюса: $i = 1, 2, \dots, M$, а M – число их, равное порядку фильтра. Цифровые фильтры с вещественными коэффициентами a_k , b_l имеют вещественные (в частном случае нулевые) и/или комплексно-сопряженные нули и полюсы. Нули и полюсы могут быть простыми и кратными. Если порядок числителя передаточной функции N меньше порядка знаменателя M , то такой фильтр имеет $(M - N)$ нулей, равных нулю, т. е. размещенных в начале координат комплексной Z -плоскости.

Зная нули и полюсы передаточной функции, ее можно представить в так называемой нуль–полюсной форме, используя разложение полиномов числителя и знаменателя на элементарные сомножители:

$$H(z) = \prod_{i=1}^M \frac{(z - z_{0i})}{(z - z_{pi})} = \prod_{i=1}^M \frac{(1 - z_{0i}z^{-1})}{(1 - z_{pi}z^{-1})}. \quad (2.36)$$

В выражении (2.36) может присутствовать нормирующий множитель $C = b_0/a_0$, если коэффициенты b_0 и a_0 передаточной функции не равны единице.

Разложением на элементарные дроби передаточная функция (2.35) может быть преобразована также в сумму однополюсных или r -полюсных (r – коэффициент кратности полюса) простых (элементарных) дробей:

$$H(z) = \frac{B(z)}{(z - z_{pr})^r (z - z_{p(r+1)}) \dots (z - z_{pM})} = \sum_{u=1}^r \frac{B_u}{(z - z_{pr})^u} + \sum_{i=r+1}^M \frac{B_i}{(z - z_{pi})} + B_0, \quad (2.37)$$

где $z_{p1} = z_{p2} = \dots = z_{pr}$ – r -кратный полюс, $z_{p(r+1)} = z_{p(r+2)} = \dots = z_{pM}$ – простые полюсы.

Коэффициенты B_i , B_u находятся с помощью вычетов в соответствии с выражениями [24]:

$$B_i = (z - z_{pi})H(z)|_{z=z_{pi}},$$

для простых полюсов и

$$B_u = \frac{1}{(r-u)!} \left[\frac{d^{r-u}}{dz^{r-u}} (z - z_{pr})H(z) \right] |_{z=z_{pr}}$$

для кратных полюсов.

Из других способов определения коэффициентов B_1, B_2, \dots, B_M наиболее простым и универсальным является метод неопределенных коэффициентов, основанный на приравнивании коэффициентов при одинаковых степенях z числителей в левой и правой (приведенной к общему знаменателю) частях (2.37) и последующем решении получающейся системы линейных уравнений [24].

Элементарные дроби, имеющие комплексно-сопряженные полюсы, объединяются в пары и преобразуются к дроби вида $(Dz+E)/(z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)$ с вещественными коэффициентами $D, E, \alpha_1 = 2\text{Re}\{z_{pi}\}, \alpha_2 = |z_{pi}|^2$, где $\text{Re}\{z_{pi}\}$ – реальная часть соответствующего полюса.

Выражения для передаточной функции в форме (2.36), (2.37) используются при реализации рекурсивных фильтров. Кроме того, они упрощают поиск аналитических выражений импульсных характеристик рекурсивных фильтров по их передаточным функциям. Связывающее их обратное Z -преобразование (2.25) в соответствии с общим выражением (2.18) находится суммированием вычетов подынтегральной функции $F(z) = H(z)z^{n-1}$ в

полюсах z_{pi} , которые, в свою очередь, определяются выражениям (2.19) для простых полюсов и (2.20) – для кратных, т. е.

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C H(z) z^{n-1} dz = \sum_{i=1}^M \text{res}_i [F(z)]|_{z=z_{pi}} \quad (2.38)$$

При $n=0$ к (2.38) также добавляется дополнительный вычет

$\text{res}_0 [H(z)/z]|_{z=z_{po}=0} = \lim_{z \rightarrow 0} H(z)$ в полюсе $Z_{po}=0$, который дает множитель z^{n-1} .

Если все полюсы z_{pi} передаточной функции $H(z)$ – простые, то выражение (2.38) для импульсной характеристики может быть представлено в следующем, общем для данного случая, виде:

$$h(n) = \sum_{i=1}^M (\text{resi}_{z=z_{pi}} [H(z)] z_{pi}^{n-1}). \quad (2.39)$$

Для передаточной функции, заданной в нуль–полюсной форме (2.36), вычеты в простых полюсах определяются следующим образом:

$$\text{resi}_{z=z_{pi}} [H(z)] = \left[\prod_{u=1}^M (z_{pi} - z_{ou}) \right] / \left[\prod_{\substack{u=1 \\ u \neq i}}^M (z_{pi} - z_{pu}) \right]. \quad (2.40)$$

При задании передаточной функции в виде суммы элементарных дробей (2.37) с простыми полюсами вычет i -й дроби в полюсе z_{pi} равен коэффициенту B_i : $\text{resi}_{z=z_{pi}} [B_i / (z - z_{pi})] = B_i$. Выражение для импульсной характеристики в этом случае получается в виде

$$h(n) = \sum_{i=1}^M B_i z_{pi}^{n-1}, \quad n > 0; \quad h(0) = B_0. \quad (2.41)$$

При наличии полюса кратности r вычет в нем через передаточную функцию в форме (2.36) находится в виде

$$\operatorname{res}_{z=z_{pi}} [F(z)] = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow z_{pr}} \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} \left[\frac{\prod_{u=1}^M (z - z_{0u})}{\prod_{u=r+1}^M (z - z_{pu})} z^{n-1} \right].$$

Поиск аналитического выражения для импульсной характеристики в этом случае сопряжен с достаточно сложными преобразованиями.

Для сравнения найдем вычет элементарной дроби с полюсом кратностью r :

$$\begin{aligned} h_r(n) &= \operatorname{res}_{z=z_{pr}}^r [B_r z^{n-1} / (z - z_{pr})^r] = \frac{B_r}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow z_{pr}} \left[\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} z^{n-1} \right] = \\ &= \frac{B_r}{(r-1)!} (n-1)(n-2) \dots (n-r+1) z_{pr}^{n-r}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

При $n=0$ $h_r(n)=0$.

Таким образом, выражения (2.41), (2.42) для вычетов элементарных дробей с простыми и кратными полюсами позволяют непосредственно определить импульсную характеристику рекурсивного фильтра по его передаточной функции, заданной в форме (2.37).

2.7. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ

Частотную характеристику РФ можно получить на основе любого из выражений его передаточной функции $H(z)$ – дробно-полиномиального (2.31), (2.35), нуль–полюсного (2.36) или разложения на элементарные дроби (2.37), используя замену $z = e^{j\omega T_d}$.

Передаточной функции (2.31) соответствует частотная характеристика РФ вида

$$H(j\omega) = \sum_{l=0}^N b_l e^{-j\omega l T_d} / (1 + \sum_{k=1}^M a_k e^{-j\omega k T_d}). \quad (2.52)$$

Преобразование (2.52) к показательной форме $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$ приводит к аналитическим выражениям для модуля $|H(j\omega)|$ и аргумента $\varphi(\omega)$ частотной характеристики, т. е. к АЧХ и ФЧХ [11, 21].

Передаточной функции РФ в нуль-полюсной форме (2.36) отвечает выражение для ЧХ, указывающее способ ее графо-аналитического вычисления:

$$H(j\omega) = \prod_{i=1}^M \frac{(e^{j\omega T_d} - |z_{0i}| e^{j\omega_{0i} T_d})}{(e^{j\omega T_d} - |z_{pi}| e^{j\omega_{pi} T_d})} = \prod_{i=1}^M \frac{R_{0i}(j\omega)}{R_{pi}(j\omega)}. \quad (2.53)$$

Числитель и знаменатель (2.53) представляют векторные расстояния R_{0i} , R_{pi} от точки на единичной окружности с угловой координатой ωT_d соответственно до нулей z_{0i} и полюсов z_{pi} РФ. Переход к модулю и аргументу (2.53) дает выражения для АЧХ и ФЧХ РФ в виде

$$|H(j\omega)| = \prod_{l=1}^N |R_{0l}| / \prod_{K=1}^N |R_{pK}|; \quad (2.54)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{l=1}^N \psi_{0l} - \sum_{K=1}^N \psi_{pK}, \quad (2.55)$$

где $|R_{0l}|$, $|R_{pK}|$ – длины векторов $R_{0l}(j\omega)$, $R_{pK}(j\omega)$, а ψ_{0l} , ψ_{pK} – углы, образуемые ими с осью абсцисс.

Расположив нули и полюсы на комплексной Z -плоскости (рис. 2.7) и измерив модули и углы векторов, соединяющих их с точкой на единичной окружности, соответствующей заданной частоте ωT_d или λ (например, с точкой A на рис. 2.7), с помощью (2.54), (2.55) можно вычислить АЧХ и ФЧХ фильтра для любых значений частоты сигнала в диапазоне $(0-\omega_d/2)$.

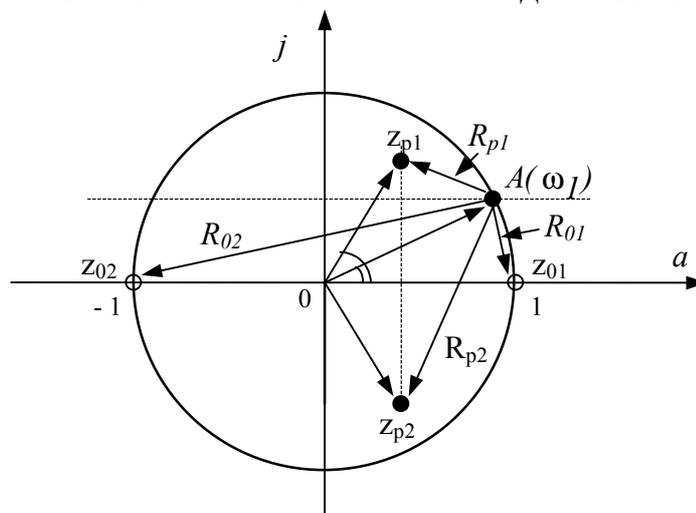


Рис. 2.7. Картина нулей и полюсов ЦФ

Такой графический способ очень удобен для качественной оценки вида частотной характеристики и частотных свойств РФ по значениям его нулей и полюсов. В соответствии с (2.54) и рис. 2.7 частотам $\omega = \omega_{pi}$ минимального расстояния до полюсов R_{pimin} отвечают максимальные значения АЧХ или коэффициента передачи РФ, частотам $\omega = \omega_{oi}$ минимального расстояния до нулей R_{oimin} – минимальные значения коэффициента передачи фильтра.

Таким образом, положение нулей определяет полосу пропускания частотной характеристики фильтра, а положение нулей – ее полосу задерживания.

В качестве примера в табл. 2.1 приведены значения АЧХ РФ 2-го порядка, вычисленные по картине нулей и полюсов рис. 2.7 для ряда нормированных цифровых частот λ . Отображенные на рисунке нули и полюсы имеют значения $z_{01} = 1$, $z_{02} = -1$, $z_{p1} = 0,4 + j0,6$, $z_{p2} = 0,4 - j0,6$. По виду АЧХ такой фильтр можно отнести к полосно-пропускающему фильтру.

Таблица 2.1

$\lambda = \omega T_d$	0	λ_A	λ_{p1}	$\pi/2$	π
$A(\lambda)$	0	1,5	4.82	2,24	0

Располагая должным образом нули и полюсы на комплексной Z -плоскости и оптимизируя их значения, можно синтезировать РФ с заданной частотной характеристикой, в том числе и произвольного вида. С помощью нулей, размещаемых на единичной окружности, при этом формируются частоты бесконечного затухания АЧХ. Нулям, превышающим по модулю единицу, отвечают РФ неминимально-фазового типа, используемые в качестве амплитудных и фазовых корректоров [13, 48].

По картине нулей и полюсов на комплексной плоскости судят также об устойчивости РФ. Полюсы устойчивого РФ, не превышающие по модулю единицу ($|z_{pi}| < 1$), находятся внутри круга единичного радиуса. Для устойчивого аналогового фильтра полюсы находятся в левой P -полуплоскости, которая (рис. 2.3) при Z -преобразовании отображается внутрь круга единичного радиуса.

Для аналитического расчета АЧХ и ФЧХ используют выражения, получаемые на основе передаточной функции РФ, соответствующей его конкретной форме реализации.

2.8. ФОРМЫ РЕАЛИЗАЦИИ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ

Рекурсивные фильтры осуществляют обработку сигнала в соответствии с разностным уравнением. Основными формами их реализации являются прямая, каноническая, каскадная и параллельная. Разностные уравнения включают вычислительные операции умножения, суммирования и задержки. На структурных схемах и при аппаратной реализации ЦФ им соответствуют элементы цифровой задержки или памяти (Z^{-1}), умножители (множительные устройства) (X) и сумматоры (Σ).

РФ порядка выше второго (по числу полюсов или порядку M общего разностного уравнения (2.4) реализуются, как правило, путем последовательного или параллельного соединения базовых звеньев второго порядка, что соответствует каскадной (последовательной) и параллельной

формам их реализации. Базовые биквадратные звенья РФ выполняются в соответствии с прямой или канонической формами реализации РФ. Число последовательных или параллельных звеньев L при четном порядке фильтра M находится как $L=M/2$, а при нечетном – как $L=(M+1)/2$, при этом одно звено фильтра является звеном первого порядка (звеном с одним вещественным полюсом).

Передаточная функция каскадно реализуемого РФ (рис. 2.8) определяется произведением передаточных функций его звеньев:

$$H(z) = \prod_{J=1}^L H_J(z),$$

$$H_J(z) = \frac{1 + b_{1J}z^{-1} + b_{2J}z^{-2}}{1 + a_{1J}z^{-1} + a_{2J}z^{-2}} = \frac{z^2 + b_{1J}z + b_{2J}}{z^2 + a_{1J}z + a_{2J}} = \frac{(z - z_{01J})(z - z_{02J})}{(z - z_{p1J})(z - z_{p2J})}, \quad (2.56)$$

где $H_J(z)$ – передаточная функция J -го биквадратного звена при значении коэффициента $b_{0J} = 1$; C_0 – нормирующий или масштабирующий множитель.

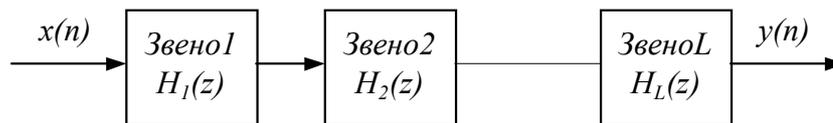


Рис. 2.8. Каскадная структура ЦФ

Для звена первого порядка коэффициенты b_{2J} и a_{2J} в (2.56) равны нулю.

Входным сигналом J -го звена $x_J(n)$ в такой структуре является выходной сигнал $y_{J-1}(n)$ предыдущего $(J-1)$ -го звена: $x_J(n) = y_{J-1}(n)$.

Коэффициенты звеньев и их полюсы, нули связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} z_{01,2J} &= (-b_{1J} \pm \sqrt{b_{1J}^2 - 4b_{2J}}) / 2; & z_{p1,2J} &= (-a_{1J} \pm \sqrt{a_{1J}^2 - 4a_{2J}}) / 2; \\ b_{1J} &= -(z_{01J} + z_{02J}); & a_{1J} &= -(z_{p1J} + z_{p2J}); \\ b_{2J} &= z_{01J} z_{02J}; & a_{2J} &= z_{p1J} z_{p2J}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Пары нулей и полюсов, определяющие значения коэффициентов J -го звена, могут быть вещественными разными, вещественными равными, а при $(b_{1J}^2 - 4b_{2J}) < 0$ и $(a_{1J}^2 - 4a_{2J}) < 0$ – комплексно-сопряженными:

$$z_{0(p)1J} = z_{0(p)2J}^* = z_{0(p)J}.$$

В этом случае соотношения (2.57) принимают вид

$$b_{1J} = -2 \operatorname{Re}\{z_{0J}\} = -2r_{0J} \cos \lambda_{0J}, \quad b_{2J} = |z_{0J}|^2 = r_{0J}^2,$$

$$(2.58) \quad a_{1J} = -2 \operatorname{Re}\{z_{pJ}\} = -2r_{pJ} \cos \lambda_{pJ}, \quad a_{2J} = |z_{pJ}|^2 = r_{pJ}^2,$$

где $\lambda_{0(p)J} = \omega_{0(p)J} T_d$ – нормированная частота нуля или полюса.

Для звена первого порядка $a_1 = -z_{p1}$, $b_1 = -z_{o1}$.

Например, значениям нулей и полюсов $z_{o1} = 1$, $z_{o2} = -1$, $z_{p1} = 0,4 + j0,6$, $z_{p2} = 0,4 - j0,6$, графически отображенным на рис. 2.7, соответствуют следующие значения коэффициентов рекурсивного звена 2-го порядка: $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = -1$, $a_1 = -0,8$, $a_2 = 0,7211$.

Передаточная функция **параллельно реализуемого РФ** (рис. 2.9) определяется суммой передаточных функций звеньев $H_J(z)$, а также константы C :

$$H(z) = C + \sum_{J=1}^L H_J(z), \quad \text{где}$$

$$H_J(z) = \frac{b_{0J} + b_{1J}z^{-1}}{1 + a_{1J}z^{-1} + a_{2J}z^{-2}}. \quad (2.59)$$

Для звена первого порядка коэффициенты b_{1J} и a_{2J} в (2.59) равны нулю.

Выходной сигнал фильтра равен сумме выходных сигналов звеньев:

$$y(n) = Cx(n) + \sum_{J=1}^L y_J(n).$$

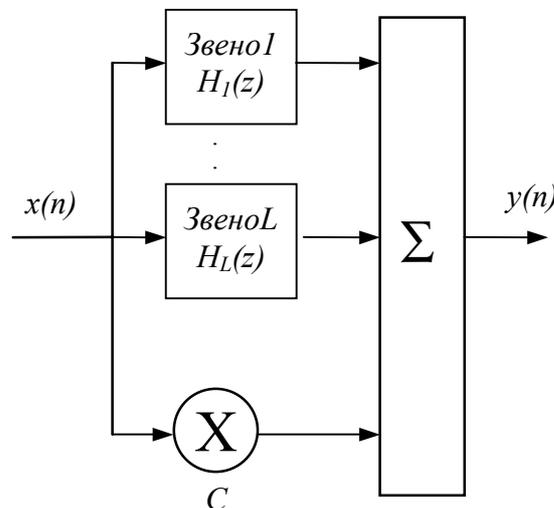


Рис. 2.9. Параллельная структура ЦФ

Передаточная функция, соответствующая параллельной структуре РФ, получается разложением на простые дроби передаточной функции фильтра, представленной в полиномиальной или нуль-полюсной форме. При этом порядок числителя передаточной функции звеньев параллельной структуры

$H_J(z)$ (2.59) на единицу меньше порядка знаменателя передаточной функции.

Коэффициенты a_{1J} и a_{2J} (2.59) определяются полюсами фильтра с помощью тех же соотношений, что и для каскадно реализуемого РФ.

Коэффициенты b_{0J} и b_{1J} связаны с нулями и полюсами фильтра через вычеты его передаточной функции в полиномиальной или нуль-полюсной форме, вычисляемые в полюсах передаточной функции z_{pi} :

$$b_{0J} = \text{res}(z_{p1J} + z_{p2J}); \quad b_{1J} = -z_{p2J} \text{res}(z_{p1J}) - z_{p1J} \text{res}(z_{p2J}). \quad (2.60)$$

В случае комплексно-сопряженных полюсов $z_{p1J} = z_{p2J}^* = z_{pJ}$ выражения (2.60) преобразуются к виду

$$b_{0J} = 2 \text{Re}\{\text{res}(z_{pJ})\}; \quad b_{1J} = -2 \text{Re}\{z_{pJ} \text{res}^*(z_{pJ})\}. \quad (2.61)$$

Вычеты в полюсах z_{pJ} находятся в соответствии с выражением

$$\text{res}(z_{pi}) = \frac{\prod_{u=1}^M (z_{pi} - z_{0u})}{\prod_{u=1, u \neq i}^M (z_{pi} - z_{pu})}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (2.62)$$

Коэффициент C в выражении для передаточной функции связан с нулями и полюсами фильтра соотношением $C = \prod_{i=1}^M (z_{0i} / z_{pi})$.

Коэффициенты C , b_{0J} , b_{1J} можно выразить также через коэффициенты каскадной формы РФ, которые связаны с полюсами, нулями фильтра более простой зависимостью.

Прямая форма реализации биквадратного звена (рис. 2.10) описывается разностным уравнением вида

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2). \quad (2.63)$$

$$x(n-2) = x(n-1); \quad x(n-1) = x(n); \quad y(n-2) = y(n-1); \quad y(n-1) = y(n).$$

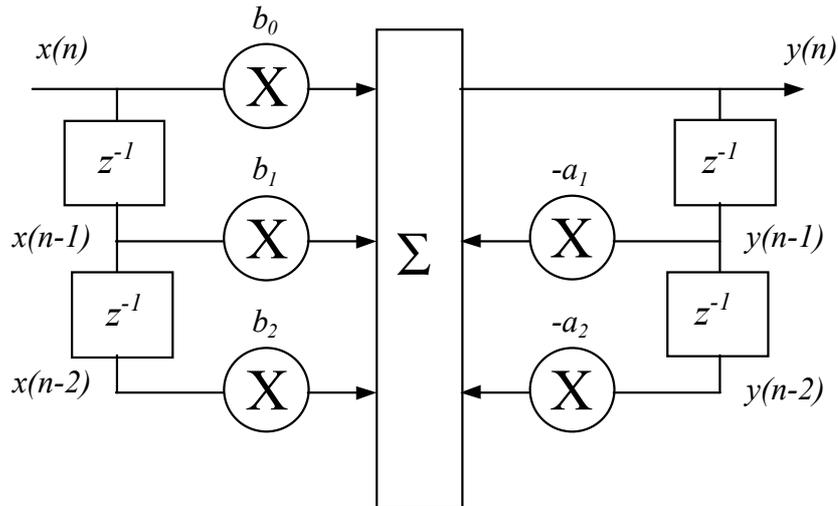


Рис. 2.10. Структура биквадратного звена для прямой формы реализации

Символом z^{-1} на схеме обозначен элемент задержки или запоминания сигнала на один период дискретизации T_d .

Уравнению звена (2.63) эквивалентна также пара разностных уравнений вида

$$w(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2),$$

$$y(n) = w(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2),$$

которые отдельно описывают нерекурсивную и чисто рекурсивную части звена при прямой форме его реализации.

Для аппаратной реализации звена необходимы 4 элемента памяти, сумматор на 5 входов и 5 умножителей (при $b_0 = 1$ число умножителей 4). При программной реализации нужно выполнить 5 (или 4) операций умножения и 4 операции сложения на 1 отсчет сигнала.

Каноническая форма реализации звена 2-го порядка получается путем представления его передаточной функции в следующем виде:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{A(z)} B(z) = \frac{W(z)}{X(z)} \frac{Y(z)}{W(z)} = H_P(z) H_H(z),$$

где $W(z)$ – вспомогательная переменная;

$H_P(z) = 1 / (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})$ – передаточная функция рекурсивной части звена;

$H_H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$ – передаточная функция нерекурсивной части звена.

Структура такого звена (рис. 2.11) имеет в 2 раза меньшее число элементов памяти z^{-1} .

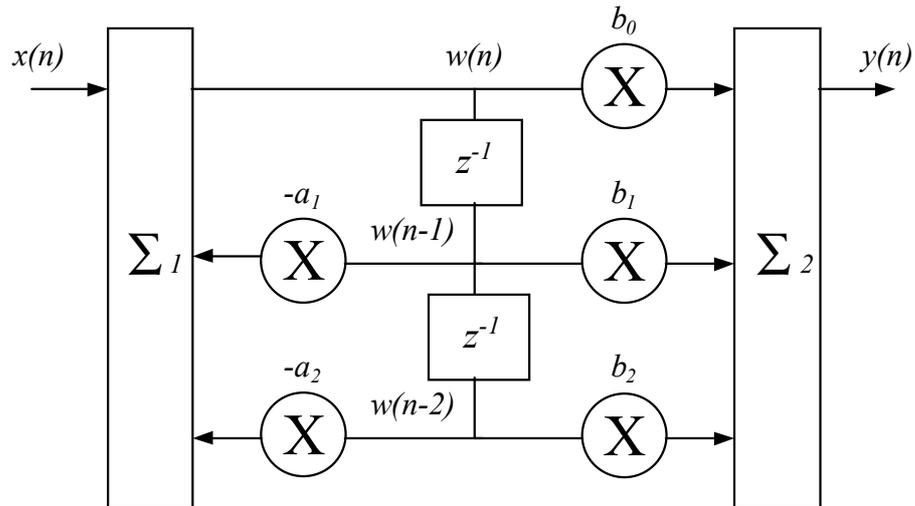


Рис. 2.11. Структурная схема биквадратного звена для канонической формы его реализации

Такое звено описывается двумя разностными уравнениями:

$$\begin{aligned}
 w(n) &= x(n) - a_1 w(n-1) - a_2 w(n-2) \\
 y(n) &= b_0 w(n) + b_1 w(n-1) + b_2 w(n-2) \\
 w(n-2) &= w(n-1); \quad w(n-1) = w(n),
 \end{aligned}
 \tag{2.64}$$

первое из которых соответствует разностному уравнению рекурсивной, а второе – нерекурсивной части звена в канонической форме. Эти уравнения подобны приведенной выше паре разностных уравнений звена в прямой форме, если поменять местами его нерекурсивную и рекурсивную части и обозначения символов.

Очевидно, что прямая и каноническая формы реализации звеньев могут быть легко обобщены и на РФ, порядок которых выше 2. Однако каскадная и параллельная формы реализации имеют определенные преимущества с точки зрения модульности структуры и меньшей чувствительности к влиянию конечной разрядности чисел. При этом наиболее часто используемой является каскадная форма реализации РФ, что связано с особенностями форматирования коэффициентов фильтров и большей их однородностью, т. е. степенью близости.

На рис. 2.12, 2.13 приведены граф-схемы алгоритмов (ГСА) программной реализации РФ на основе каскадного и параллельного соединения биквадратных звеньев. Программы ЦФ имеют циклическую структуру. Во внутреннем цикле по переменной J осуществляется последовательная обработка текущего отсчета сигнала биквадратными звеньями фильтра в соответствии с их базовой операцией. Базовая операция включает разностные уравнения звена (2.64) и пересылки (или сдвиги) сигнальной памяти

$W2(J)=W1(J)$, $W1(J)=W$, которые предшествуют обработке следующего отсчета сигнала в соответствии с внешним циклом ГСА.

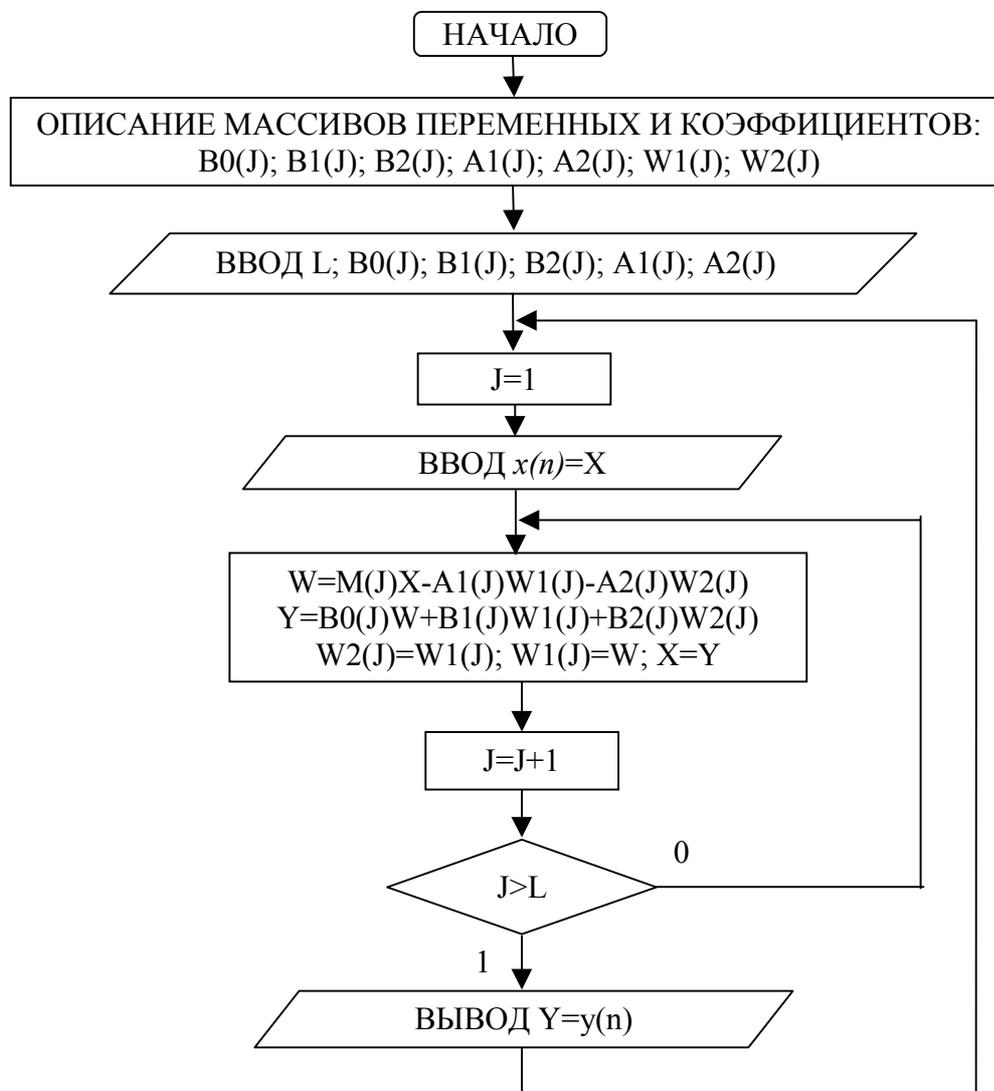


Рис. 2.12. Граф-схема алгоритма программной реализации РФ (каскадная форма реализации)

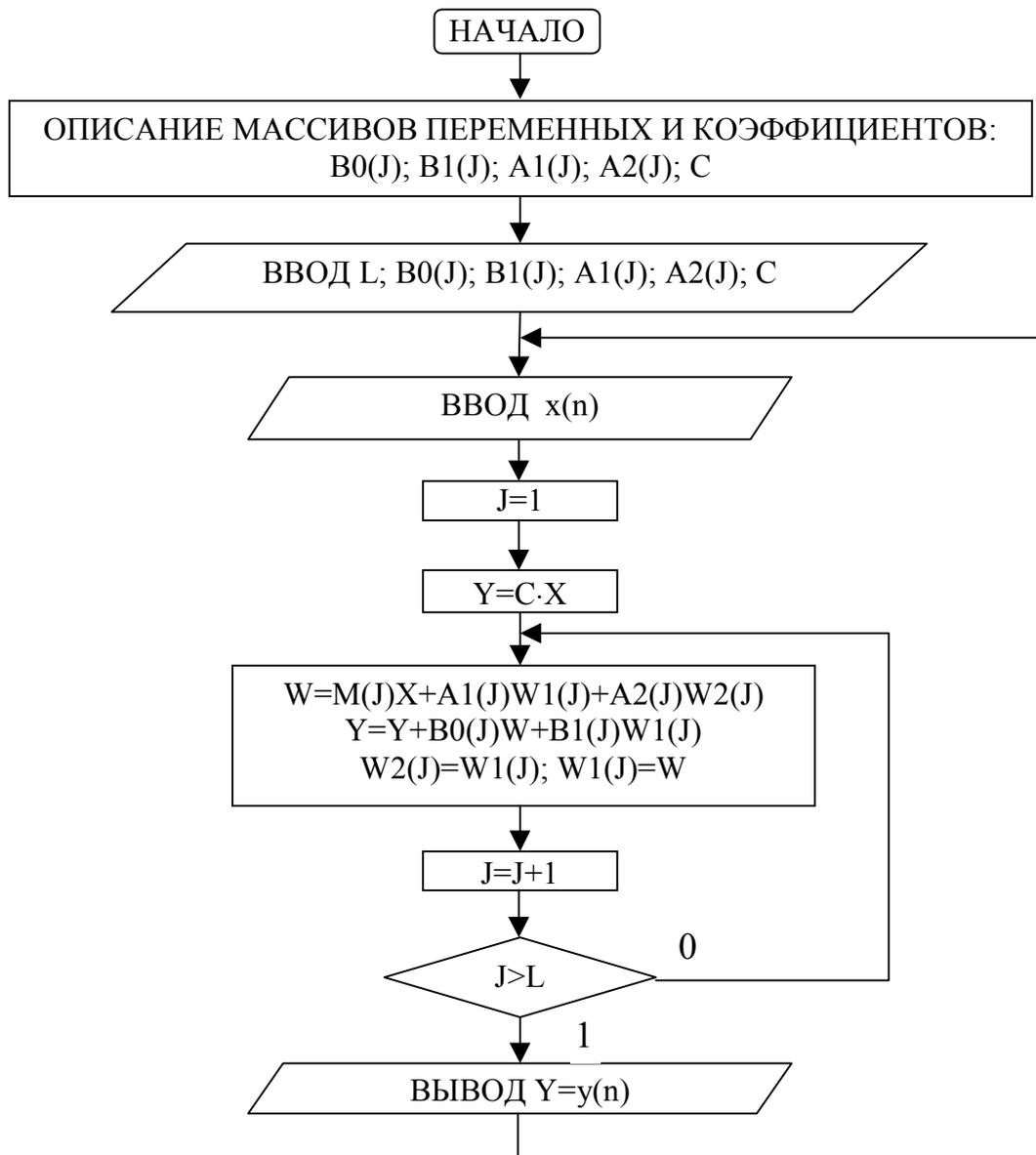


Рис. 2.13. Граф-схема алгоритма программной реализации РФ (параллельная форма реализации)

На ГСА рис. 2.12, 2.13 использованы программные переменные (идентификаторы): $B0(J)$, $B1(J)$, $B2(J)$, $A1(J)$, $A2(J)$ – для коэффициентов звеньев b_{0j} , b_{1j} , b_{2j} , a_{1j} , a_{2j} и X , Y , W , $W1(J)$, $W2(J)$ – для отсчетов сигнала $x(n)$, $y(n)$, $w_J(n-1)$, $w_J(n-2)$. С помощью коэффициентов $M(J)$ осуществляется масштабирование входных сигналов звеньев.

При переходе к прямой форме реализации звеньев базовая операция в соответствии с (2.63) преобразуется к виду

$$X = M(J)X;$$

$$Y = B0(J) X + B1(J)X1(J) + B2(J)X2(J) - A1(J)Y1(J) - A2(J)Y2(J);$$

$$X2(J) = X1(J); X1(J) = X; Y2(J) = Y1(J); X = Y.$$

Идентификаторам $X1(J)$, $X2(J)$, $Y1(J)$, $Y2(J)$ соответствуют здесь сигналы $x_J(n-1)$, $x_J(n-2)$, $y_J(n-1)$, $y_J(n-2)$.

Из других структур РФ интерес, с точки зрения реализации, представляет дуальная или **обращенная каноническая структура биквадратного звена** (рис. 2.14). При построении дуальных структур входы заменяются выходами, сумматоры узлами, а узлы сумматорами [14].

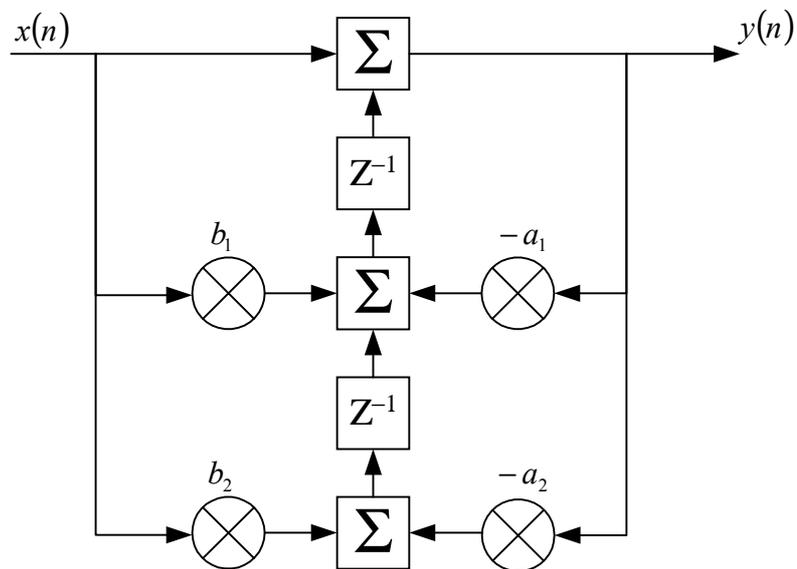


Рис. 2.14. Дуальная каноническая структура биквадратного звена

Базовая операция обращенной структуры звена включает следующие операторы: $X = M(J)X$;

$$Y = X + W1(J); W1(J) = B1(J)X - A1(J)Y + W2(J); W2(J) = B2(J) - A2(J).$$

Для обеспечения нулевых начальных условий работы фильтров переменные, определяющие содержимое ячеек сигнальной памяти, должны быть обнулены при их описании. Это переменные $W1(J)$, $W2(J)$ для канонической формы звеньев и $X1(J)$, $X2(J)$, $Y1(J)$, $Y2(J)$ – для прямой.

Известны также лестничные [17, 26] и решетчатые структуры РФ, используемые в адаптивных системах [49].

2.9. ПРЯМАЯ ФОРМА РЕАЛИЗАЦИИ НЕРЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ

Нерекурсивному фильтру, основанному на прямом вычислении ДВС, соответствует структурная схема рис. 2.15.

Для аппаратной реализации НФ необходимы $(N-1)$ элемент памяти, N умножителей и сумматор на N входов.

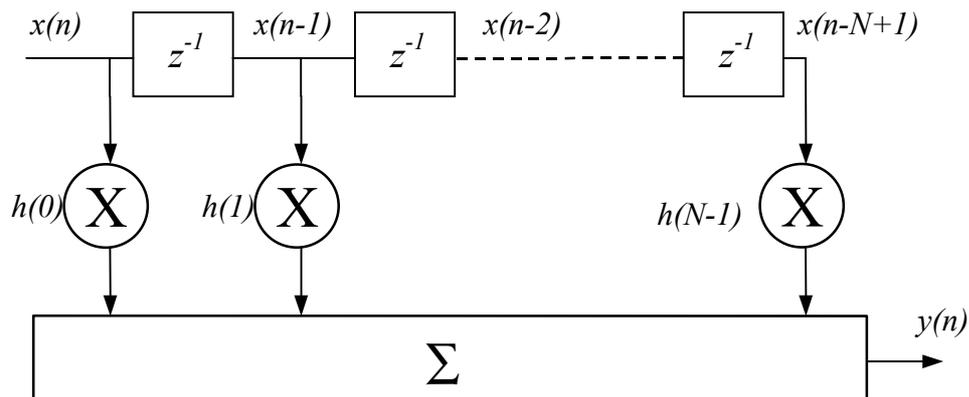


РИС. 2.15. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА НЕРЕКУРСИВНОГО ФИЛЬТРА НА ОСНОВЕ ДВС

Граф-схема алгоритма программной реализации НФ приведена на рис. 2.16. Алгоритм обработки представлен в “машинных” переменных $Y \leftarrow y(n)$, $H(k) \leftarrow h(m)$, $X(l) \leftarrow x(n-m)$. Фильтр реализует базовую операцию $Y = Y + H(k)X(l)$. Переменные $X(l)$ должны быть обнулены при их описании. Требуемый объем вычислений при программной реализации составляет $(N-1)$ операций сложения и N операций умножения на каждый отсчет выходного сигнала.

2.10. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕРЕКУРСИВНОГО ФИЛЬТРА

Передаточная функция $H(z)$ и частотная характеристика $H(j\omega)$ НФ определяются Z -преобразованием и преобразованием Фурье его импульсной характеристики:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}; \quad H(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega nT_d}. \quad (2.65)$$

При большой крутизне срезов АЧХ нерекурсивные фильтры имеют достаточно длинные импульсные характеристики, требующие большого объема памяти и вычислений. В то же время им свойственны абсолютная устойчивость и возможность получения строго линейной ФЧХ или

постоянного группового времени запаздывания (ГВЗ). Условием линейности ФЧХ является симметрия импульсной характеристики фильтра: $h(n) = h(N-1-n)$. Отвечающие данному условию НФ имеют ФЧХ: $\varphi(\omega) = -\omega T_d(N-1)/2$ и время запаздывания $t_3 = -(N-1)/2 T_d$.

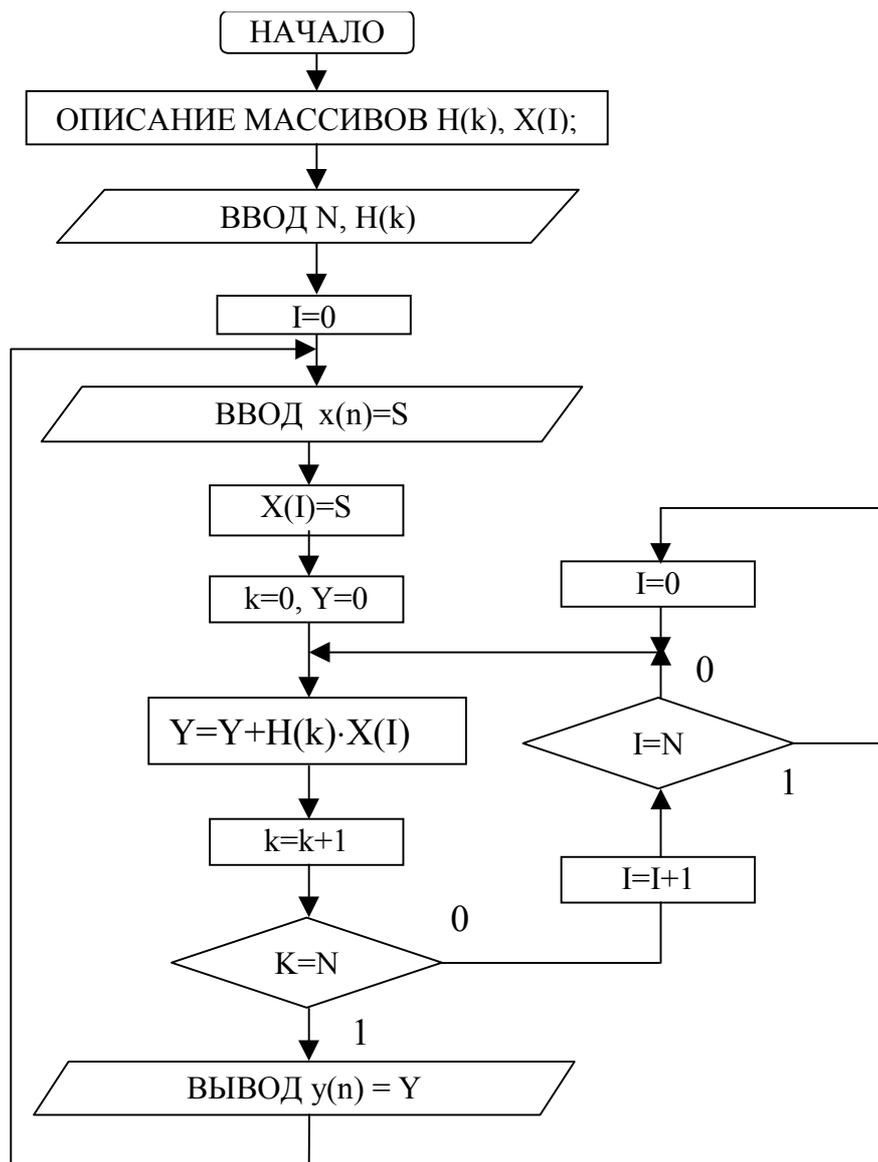


Рис. 2.16. Граф-схема алгоритма программной реализации НФ на основе прямого вычисления ДВС

2.11. НЕРЕКУРСИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ С ЛИНЕЙНОЙ ФАЗОЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Передаточную функцию и частотную характеристику НФ (2.65) с ИХ, отвечающей условию симметрии $h(n) = h(N-1-n)$ (рис. 2.17), при нечетном N можно привести к виду

$$H(z) = z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} \left[h(n) \left(z^{-\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} + z^{\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} \right) \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\}, \quad (2.66)$$

$$H(j\omega) = e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}T_d\right)} \left[\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \cos \omega T_d \left(n - \frac{N-1}{2} \right) + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right]. \quad (2.67)$$

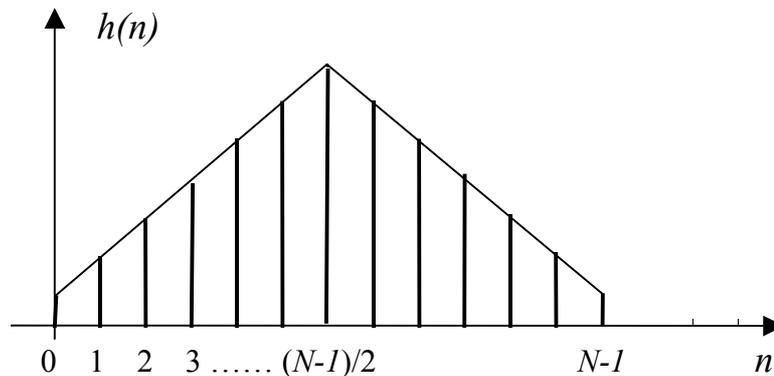


Рис. 2.17. Пример симметричной импульсной характеристики НФ

При четном N слагаемое $h((N-1)/2)$ в обоих выражениях отсутствует, а верхний предел суммирования заменяется на $((N/2) - 1)$.

Из выражения для ЧХ следует, что ФЧХ такого фильтра

$\varphi(\omega) = -\omega T_d (N-1)/2$ — строго линейна, а время запаздывания $t_s = -[(N-1)/2]T_d$ не зависит от частоты.

ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ (2.66) МОЖНО ПОСТАВИТЬ В СООТВЕТСТВИЕ СТРУКТУРУ НФ, ТРЕБУЮЩУЮ ВДВОЕ МЕНЬШЕГО КОЛИЧЕСТВА ОПЕРАЦИЙ УМНОЖЕНИЯ (РИС. 2.18).

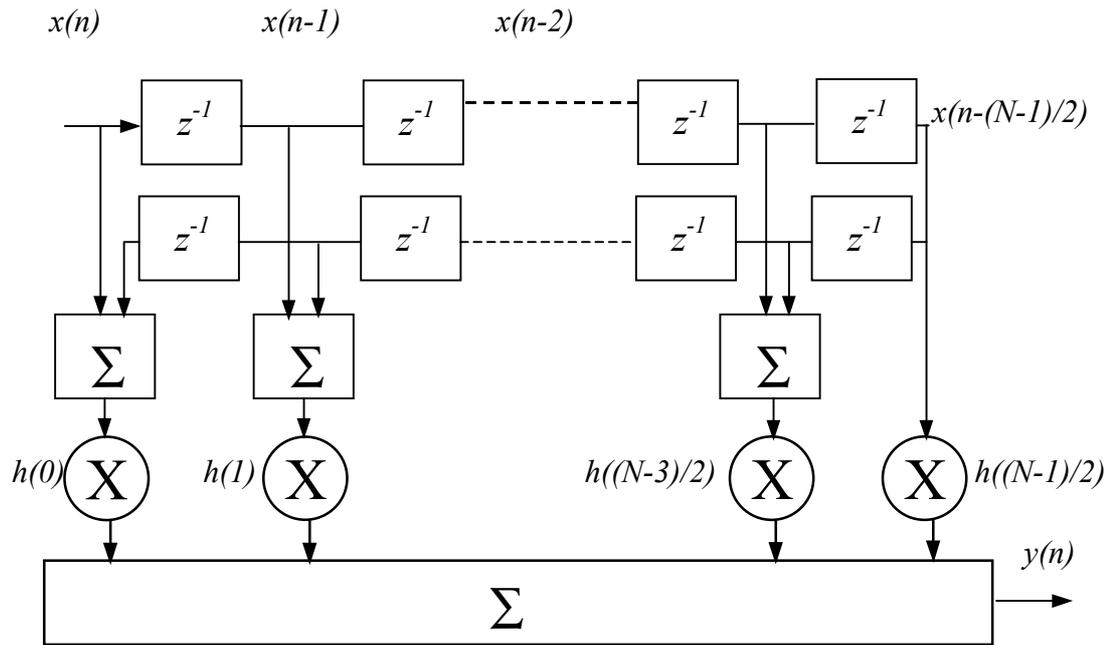


Рис. 2.18. Структурная схема НФ с симметричной импульсной характеристикой

Такая структура реализует алгоритм

$$y(n) = \left[\sum_{m=0}^{\frac{N-3}{2}} h(m) [x(n-m) + x(n-N+1-m)] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) x\left(n - \frac{N-1}{2}\right) \right].$$

Аналогичную структуру и алгоритм можно составить и для четного N . Следует отметить, что при четном N $|H(j\omega_d/2)| = 0$ и $\varphi(\omega_d/2) = 0$.

Для НФ, как и РФ, также существуют **дуальная** или **обращенная** (рис. 2.19) и решетчатая структуры [14, 49].

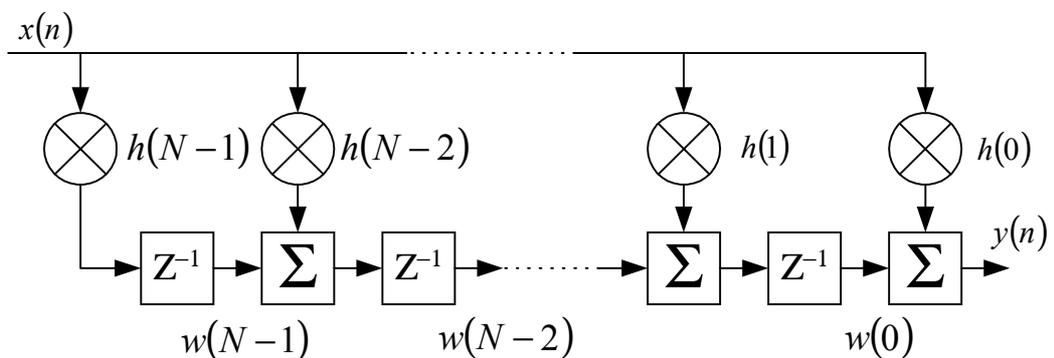


Рис. 2.19. Дуальная структура не рекурсивного фильтра на основе ДВС

Обработка в обращенной структуре осуществляется в соответствии с базовой операцией:

$$Y=H(0)X+W(0); W(k)=H(k)X+W(k+1), k=0, 1.. N- 1.$$

Переменные $W(k)$, $k= 0, 1...N$, должны быть обнулены при их описании.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В соответствии с каким алгоритмом осуществляется обработка сигнала рекурсивным цифровым фильтром?
2. Как определяется импульсная характеристика цифрового фильтра, какие цифровые фильтры называют фильтрами БИХ и КИХ-типа?
3. Какой смысл имеют коэффициенты нерекурсивных цифровых фильтров?
4. Возможна ли практическая реализация рекурсивных фильтров на основе дискретной временной свертки?
5. Как определяется Z -преобразование дискретных последовательностей, каковы его основные свойства и какую роль оно играет в теории цифровых фильтров?
6. Как определяются передаточная функция и частотная характеристика цифрового фильтра и какова их связь с его импульсной характеристикой?
7. В чем особенности частотных характеристик цифровых фильтров и чем они обусловлены?
8. Как определяется передаточная функция рекурсивного фильтра по его разностному уравнению?
9. Какой вид имеет нуль-полюсная форма передаточной функции рекурсивного фильтра и каково ее практическое значение?
10. Как отображаются нули и полюсы цифрового фильтра на комплексной Z -плоскости и какую информацию о фильтре можно получить по картине его нулей и полюсов?
11. Какие возможны формы реализации рекурсивных фильтров и как они описываются математически?
12. Каковы структура и математическое описание прямой и канонической форм реализации рекурсивных звеньев второго порядка?
13. Какова связь между коэффициентами и нулями – полюсами для каскадной и параллельной форм реализации РФ?
14. Какова структура и математическое описание нерекурсивного фильтра на основе ДВС?
15. Каково условие линейности фазочастотной характеристики нерекурсивного фильтра?
16. Какой объем вычислительных операций выполняется в рекурсивном и нерекурсивном фильтрах при обработке одного отсчета сигнала?

17. Как аналитически может быть найден отклик рекурсивного и нерекурсивного фильтров на заданное входное воздействие?

18. Покажите, как найти отклик рекурсивного и нерекурсивного фильтров на сигнал типа единичный скачок в соответствии с алгоритмами обработки, которые они реализуют?

3. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ПО ЗАДАННОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ (ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ)

3.1. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ СИНТЕЗА ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Синтез ЦФ в общем случае включает синтез передаточной функции и структуры фильтра по заданной его частотной или импульсной характеристике и оценку требуемой разрядности чисел для коэффициентов фильтра и отсчетов входного, выходного и внутренних сигналов.

Синтез передаточной функции ЦФ $H(z)$ по заданной частотной характеристике $H_d(j\omega)$ заключается в ее аппроксимации и определении коэффициентов передаточной функции. Используемые здесь методы разделяются на аналитические, итерационные и численные.

Аналитические методы обеспечивают решение задачи аппроксимации в замкнутой аналитической форме. К ним относятся методы синтеза рекурсивных фильтров (РФ) по данным аналогового фильтра-прототипа и в первую очередь **метод билинейного преобразования**.

Итерационные методы, сочетая аналитический и численный подходы, не дают однозначного соответствия параметров расчетных и заданных характеристик и требуют, как правило, ряда уточняющих процедур. Итерационными являются методы **весовых функций и частотной выборки**, используемые для синтеза нерекурсивных фильтров (НФ).

Численные методы основываются на непосредственной аппроксимации заданной частотной характеристики с минимальной погрешностью в соответствии с определенным критерием оптимальности.

По виду аппроксимируемой частотной характеристики $H_d(j\omega)$ различают цифровые фильтры со ступенчатообразной амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) – фильтры нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосно-пропускающие (ППФ), полосно-заграждающие (ПЗФ), многополосные (МПФ) (рис. 3.1) и ЦФ с произвольной частотной характеристикой. Могут быть синтезированы также ЦФ с частотной характеристикой цифрового дифференциатора и преобразователя Гильберта.

Так как частотные характеристики ЦФ периодичны по частоте с периодом ω_d и их модуль (АЧХ) и аргумент (ФЧХ) обладают свойствами соответственно четной и нечетной симметрии относительно частот $\omega = 0$ или $\omega_d/2$, то их достаточно задать в полосе частот $(0-\omega_d/2)$ или полосе $(0-\pi)$ нормированных частот $\lambda = \omega T_d$ (рис. 3.1).

Исходными данными для синтеза ЦФ по заданной частотной характеристике (рис. 3.1) являются:

частоты среза, задерживания ω_c , ω_s , определяющие границы и значения полос пропускания, задерживания и переходных полос фильтра;

допустимая неравномерность АЧХ фильтра в полосе пропускания (или ослабление на границах полосы пропускания в случае монотонных АЧХ) a_n , дБ;

минимальное затухание АЧХ в полосе задерживания a_3 , дБ.

Параметрам a_n , a_3 , определяющим допустимые погрешности аппроксимации заданной идеализированной АЧХ $|H_d(j\omega)|$, соответствуют на рис. 3.1 уровни допустимого отклонения расчетной АЧХ $|H(j\omega)|$ от 1 в полосе пропускания ($1-\delta_1$) и от нуля в полосе задерживания δ_2 : $a_n = 20\lg[1/(1-\delta_1)]$, дБ; $a_3 = 20\lg(1/\delta_2)$, дБ.

Выделенные на рис. 3.1 пунктиром области образуют поле допусков на погрешности аппроксимации, в которые должна уложиться расчетная аппроксимирующая АЧХ $|H(j\omega)|$, показанная на рис. 3.1, в.

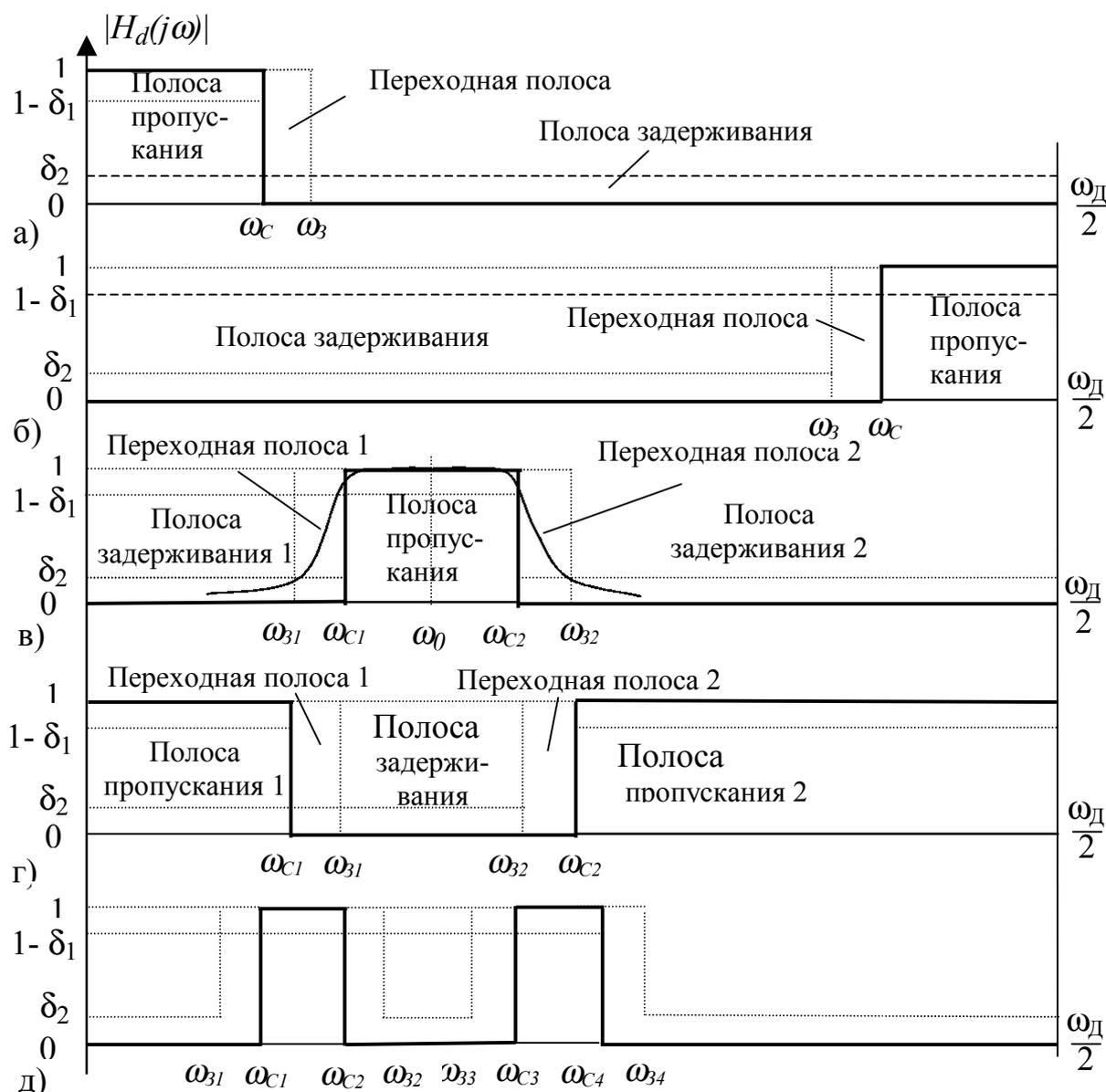


Рис. 3.1. Примеры задания АЧХ ЦФ

3.2. СИНТЕЗ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ ПО АНАЛОГОВОМУ ПРОТОТИПУ. МЕТОД БИЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

3.2.1. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Синтез РФ по аналоговому прототипу возможен методами **отображения дифференциалов**, заключающемся в дискретизации дифференциального уравнения аналоговой цепи, т. е. переходе от производных к конечным разностям, **инвариантности импульсных характеристик**, основанном на дискретизации импульсной характеристики аналоговой цепи и **согласованного Z-преобразования** вида $p + p_{p(0)i} \rightarrow 1 - z^{-1} e^{-p_{p(0)i} T_d}$, где $p_{p(0)i}$ – полюсы и нули преобразуемой передаточной функции аналоговой цепи. [15, 50]. Однако ни одним из них не достигается необходимое соответствие частотных свойств ЦФ и аналогового прототипа. Такое соответствие при синтезе ЦФ со ступенчатообразными АЧХ обеспечивает **метод билинейного преобразования** или **инвариантности частотных характеристик** [14, 15, 17, 26].

В этом методе синтезируемому ЦФ ставится в соответствие некоторый аналоговый фильтр-прототип (АФП) с передаточной функцией $H(p)$ и частотной характеристикой $H(j\Omega)$, однозначно связанными с передаточной функцией $H(z)$ и частотной характеристикой $H(j\omega)$ ЦФ:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{АФП:} & & \text{ЦФ:} & & \text{АФП:} \\
 \text{ЦФ:} & & & & \\
 H(p) \xrightarrow[p = f(z)]{z = f^{-1}(p)} H(z), & & & & H(j\Omega) \xrightarrow[\omega = f^{-1}(\Omega)]{\Omega = f(\omega)} H(j\omega).
 \end{array}$$

Связь эта определяется прямой $p = f(z)$ и обратной $z = f^{-1}(p)$ преобразующими функциями и соответствующими им при $p = j\Omega$ и $z = e^{j\omega T_d}$ преобразованиями частот $\Omega = f(\omega)$, $\omega = f^{-1}(\Omega)$ аналогового и цифрового фильтров. С помощью этих преобразований определяются требования к АФП, по которым хорошо разработанными методами синтезируется его передаточная функция $H(p)$, преобразуемая затем в искомую передаточную функцию ЦФ $H(z)$.

Преобразующие функции должны удовлетворять следующим условиям:

левая P -полуплоскость $p = \sigma + j\Omega$, $\sigma < 0$, в которой размещаются полюсы устойчивого АФП, должна однократно отображаться внутрь круга единичного радиуса $|z| < 1$, в котором на Z -плоскости размещаются полюсы устойчивого ЦФ, т.е. устойчивому АФП должен соответствовать устойчивый ЦФ;

вся мнимая ось частот $j\Omega$ АФП, $\Omega = (0 \pm \infty)$, должна однократно, т. е. в

один обход, отображаться на окружность единичного радиуса Z -плоскости $e^{j\omega T_d}$, $\omega = (0 \pm \omega_d/2)$, обеспечивая близость частотных характеристик обоих фильтров.

Этим условиям отвечают **простое билинейное преобразование и обобщенные билинейные преобразования.**

3.2.2. ПРОСТОЕ БИЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Данное преобразование применимо в случае, когда аналоговый и цифровой фильтры одинакового типа. Ему соответствуют преобразующие функции и частотные преобразования вида:

$$p = f(z) = \alpha \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad z = f^{-1}(p) = \frac{\alpha + p}{\alpha - p}, \quad (3.1)$$

$$\Omega = \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega T_d}{2} = f(\omega), \quad \omega = (2/T_d) \operatorname{arctg}(\Omega/\alpha), \quad (3.2)$$

где α – нормирующая константа. Один из способов ее определения заключается в том, что минимальной частоте среза ЦФ ставится в соответствие единичное значение частоты среза нормализованного АФП:

$$\Omega_c = \alpha \operatorname{tg} \frac{\omega_c T_d}{2} = 1 \quad \text{рад/с.}$$

Отсюда $\alpha = \operatorname{ctg} \frac{\omega_c T_d}{2}$.

В результате перехода к нормированным частотам ЦФ $\lambda = \omega T_d$ частотные преобразования (3.2) принимают вид

$$\Omega = f(\lambda) = \operatorname{ctg} \frac{\lambda_c}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2}; \quad \lambda = f^{-1}(\Omega) = 2 \operatorname{arctg}(\Omega \cdot \operatorname{tg} \frac{\lambda_c}{2}). \quad (3.3)$$

Анализируя (3.1), (3.3), можно убедиться в соответствии билинейного преобразования вышеприведенным условиям отображения P и Z плоскостей.

Несмотря на нелинейность частотного преобразования, сжимающего бесконечный диапазон физических частот АФП в основную полосу физических частот ЦФ $(0 - f_d/2)$ ($\lambda = 0 - \pi$) (рис. 3.2), при синтезе РФ со ступенчатообразными АЧХ обеспечивается необходимая эквивалентность АФП и ЦФ по параметрам δ_1 , δ_2 , определяющим предельные погрешности аппроксимации, если граничные частоты среза и задерживания их связаны частотной преобразующей функцией:

$$\Omega_c = f(\lambda_c) = 1; \quad \Omega_3 = f(\lambda_3) = \operatorname{ctg} \frac{\lambda_c}{2} \operatorname{tg} \frac{\lambda_3}{2}; \quad \lambda_3 = \omega_3 T_d.$$

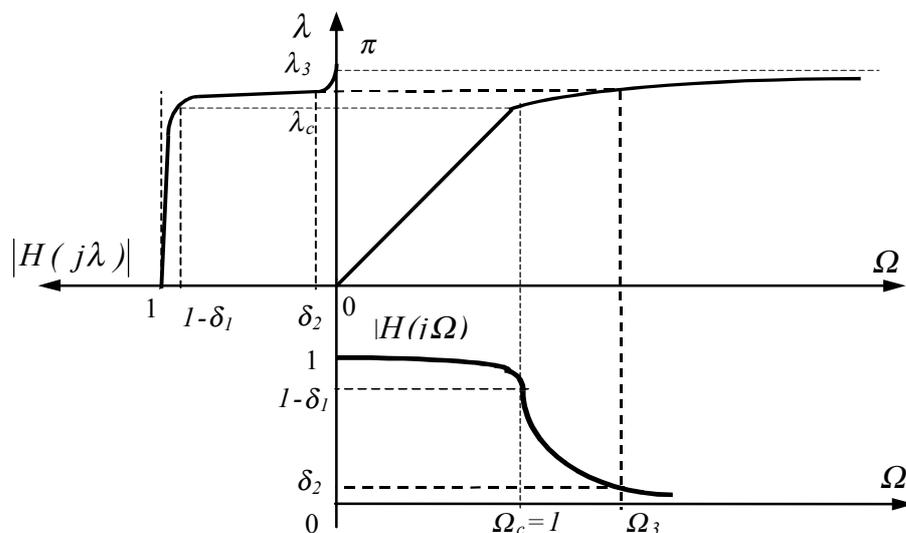


Рис. 3.2. Преобразование ЧХ аналогового ФНЧ в частотную характеристику цифрового ФНЧ

Однако вследствие нелинейности частотного преобразования возможно существенное отличие ФЧХ цифрового и аналогового фильтров.

3.2.3. ОБОБЩЕННЫЕ БИЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Синтез аналоговых фильтров с разными типами АЧХ (ФВЧ, ППФ, ПЗФ, МПФ) выполняется по **нормализованному аналоговому ФНЧ-прототипу (АФПНЧ)**. Представляется удобным использование нормализованного аналогового ФНЧ и в качестве прототипа при синтезе ЦФ. При этом каждому типу ЦФ ставится в соответствие обобщенное билинейное преобразование $p = f_{\text{об}}(z)$ и соответствующее ему частотное преобразование $\Omega = f_{\text{об}}(\lambda)$, которые непосредственно устанавливают связь между передаточной функцией и частотной характеристикой АФПНЧ и ЦФ заданного типа и исключают необходимость каких-либо дополнительных промежуточных преобразований.

Для основных типов фильтров обобщенные преобразования приведены в табл. 3.1. Частотные преобразования представлены в таблице соотношениями между граничными частотами аналогового ФНЧ и ЦФ заданного типа. Для цифровых ППФ и ПЗФ в качестве частоты задерживания Ω_3 аналогового ФНЧ-прототипа принимается одна из расчетных частот $\Omega_{31,2}$, имеющая наименьшее по модулю значение.

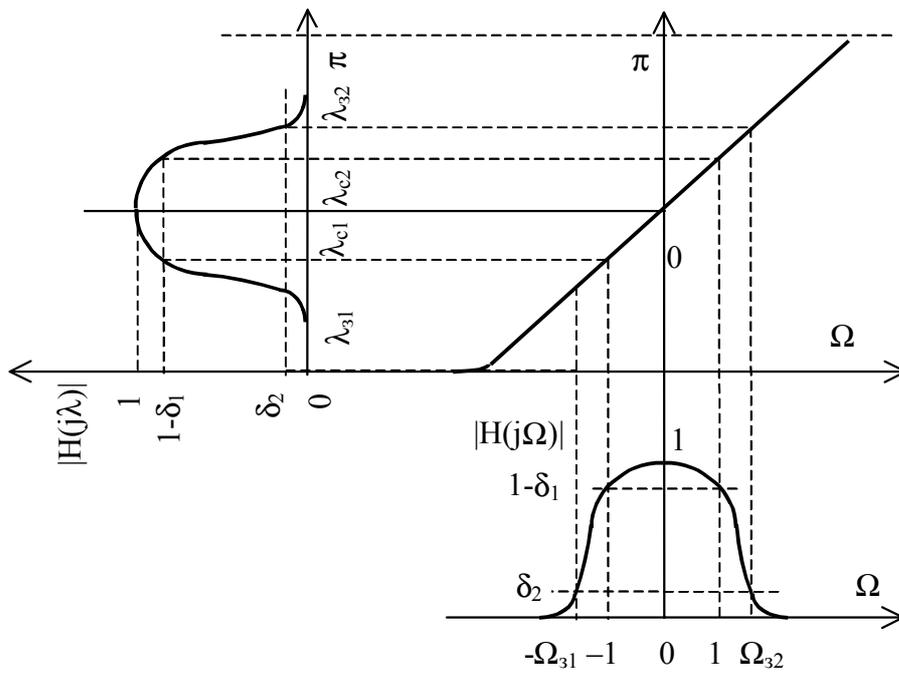
Таблица 3.1

Тип ЦФ	Преобразование $p \rightarrow z$	Преобразование $\Omega \rightarrow \lambda$
ФНЧ	$p = \alpha(z-1)/(z+1)$ $\alpha = ctg(\lambda_c/2)$	$\Omega_3 = \alpha \cdot tg(\lambda_3/2)$ $\Omega_c = 1$
ФВЧ	$p = \alpha(z+1)/(z-1)$ $\alpha = tg(\lambda_c/2)$	$\Omega_3 = \alpha \cdot ctg(\lambda_3/2)$ $\Omega_c = 1$
ППФ	$p = \alpha(z^2 - 2\beta z + 1)/(z^2 - 1)$ $\alpha = ctg[(\lambda_{c2} - \lambda_{c1})/2]$ $\beta = \cos[(\lambda_{c2} + \lambda_{c1})/2] / \cos[(\lambda_{c2} - \lambda_{c1})/2]$	$\Omega_{31,2} = \alpha(\beta - \cos \lambda_{31,2}) / \sin \lambda_{31,2} $ $\Omega_{c1,2} = \pm 1$
ПЗФ	$p = \alpha(z^2 - 1)/(z^2 - 2\beta z + 1)$ $\alpha = tg[(\lambda_{c2} - \lambda_{c1})/2]$ $\beta = \cos[(\lambda_{c2} + \lambda_{c1})/2] / \cos[(\lambda_{c2} - \lambda_{c1})/2]$	$\Omega_{31,2} = \alpha \sin \lambda_{31,2} / (\beta - \cos \lambda_{31,2})$ $\Omega_{c1,2} = \pm 1$

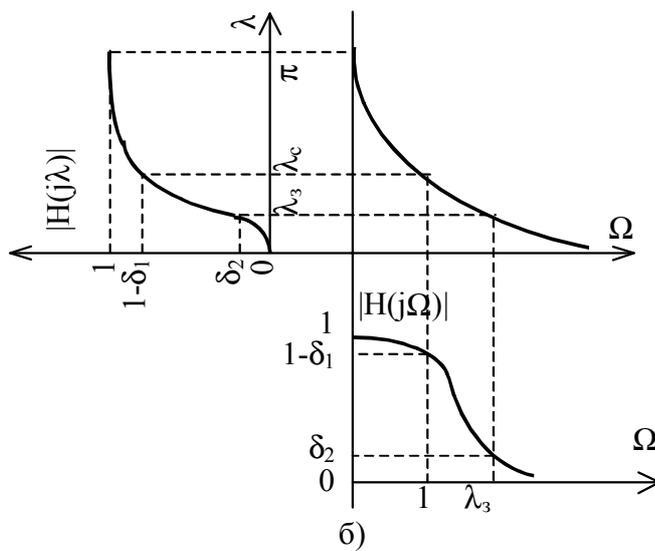
Частотные преобразования табл. 3.1. иллюстрируются графиками рис.3.3, а, б, в.

3.2.4. ЗАДАЧИ СИНТЕЗА АНАЛОГОВОГО ФНЧ-ПРОТОТИПА

Синтез АФПНЧ включает выбор аппроксимирующей функции, определение порядка фильтра m , значений нулей p_{0i} и полюсов p_{pi} и передаточной функции по заданным граничным частотам $\Omega_c = 1$, Ω_3 и допускам на погрешности аппроксимации δ_1 , δ_2 (a_n , a_3). Синтез выполняется по справочникам или с помощью специальных компьютерных программ.



а)



б)

Рис. 3.3. Графики обобщенных частотных преобразований для ЦФ ППФ (а), ФВЧ (б) и ПЗФ (в)

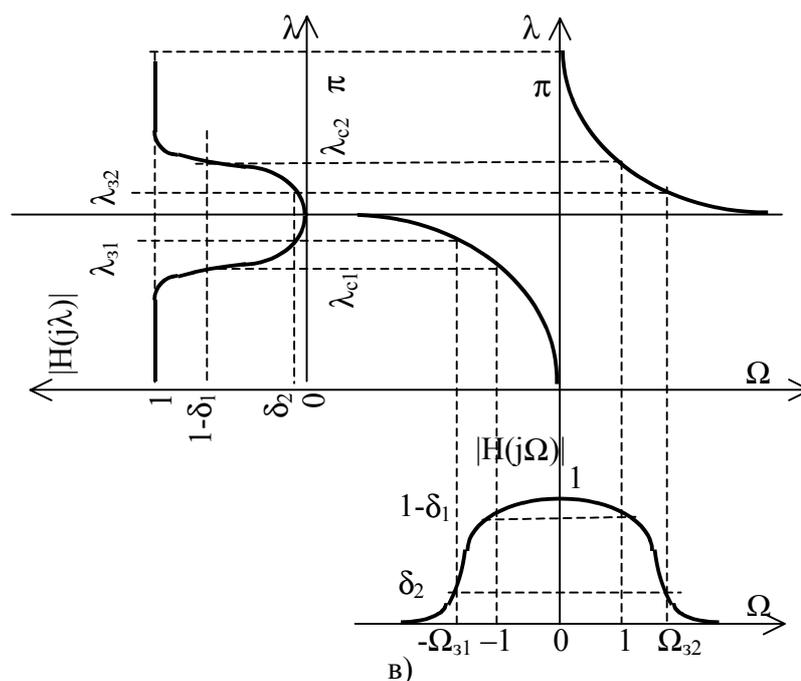


Рис. 3.3. Окончание

Нули и полюсы синтезированного АФПНЧ полностью определяют его передаточную функцию $H(p)$:

$$H(p) = C \prod_{i=1}^{m_1} (p - p_{0i}) / \prod_{i=1}^m (p - p_{pi}),$$

где C – нормирующий множитель; m_1 – число конечных нулей ($m_1 < m$). Следует отметить, что полюсы АФПНЧ являются вещественными или комплексно-сопряженными числами (со знаком минус перед реальной частью), а конечные нули чисто мнимыми.

3.2.5. АППРОКСИМИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ СИНТЕЗЕ АФПНЧ

Синтез АФПНЧ заключается в аппроксимации его заданной идеализированной ЧХ с помощью соответствующих аппроксимирующих функций.

Квадрат модуля ЧХ $H(j\Omega)$, аппроксимирующей заданную, при синтезе нормализованного АФПНЧ задается выражением

$$|H(j\Omega)|^2 = 1 / [1 + \epsilon^2 f^2(\Omega)],$$

где ϵ^2 – параметр, характеризующий неравномерность АЧХ в полосе пропускания $0 < \Omega < 1$; $f(\Omega)$ – аппроксимирующая функция, называемая также функцией фильтрации. В полосе пропускания она должна стремиться к нулю, а в полосе задерживания – к бесконечности.

В качестве аппроксимирующих функций используются полиномы и

дроби.

К полиномиальным относятся аппроксимации Тейлора (фильтры Баттерворта), Чебышева, к дробным – Кауэра–Золоторева (эллиптические фильтры), Чебышева инверсная. Передаточные функции фильтров с полиномиальной аппроксимацией не имеют конечных нулей, их частотные характеристики монотонны в полосе задерживания. У фильтров с **дробной аппроксимацией** передаточные функции имеют нули на конечных частотах в полосе задерживания, а частотные характеристики – пульсации (в том числе равноволновые) в этой полосе. Фильтры Чебышева и эллиптические имеют равноволновые пульсации и в полосе пропускания.

Типичные графики частотных характеристик нормализованного АФПНЧ с полиномиальной и дробной аппроксимациями приведены на рис. 3.4.

Для частотных характеристик с равноволновыми пульсациями на графиках указаны соответствующие им частоты нулей и полюсов Ω_{pi} , Ω_{oi} ПФ.

Фильтры с дробной аппроксимацией обеспечивают лучшие характеристики затухания при одинаковом порядке фильтра или меньшее значение порядка при заданном затухании частотной характеристики.

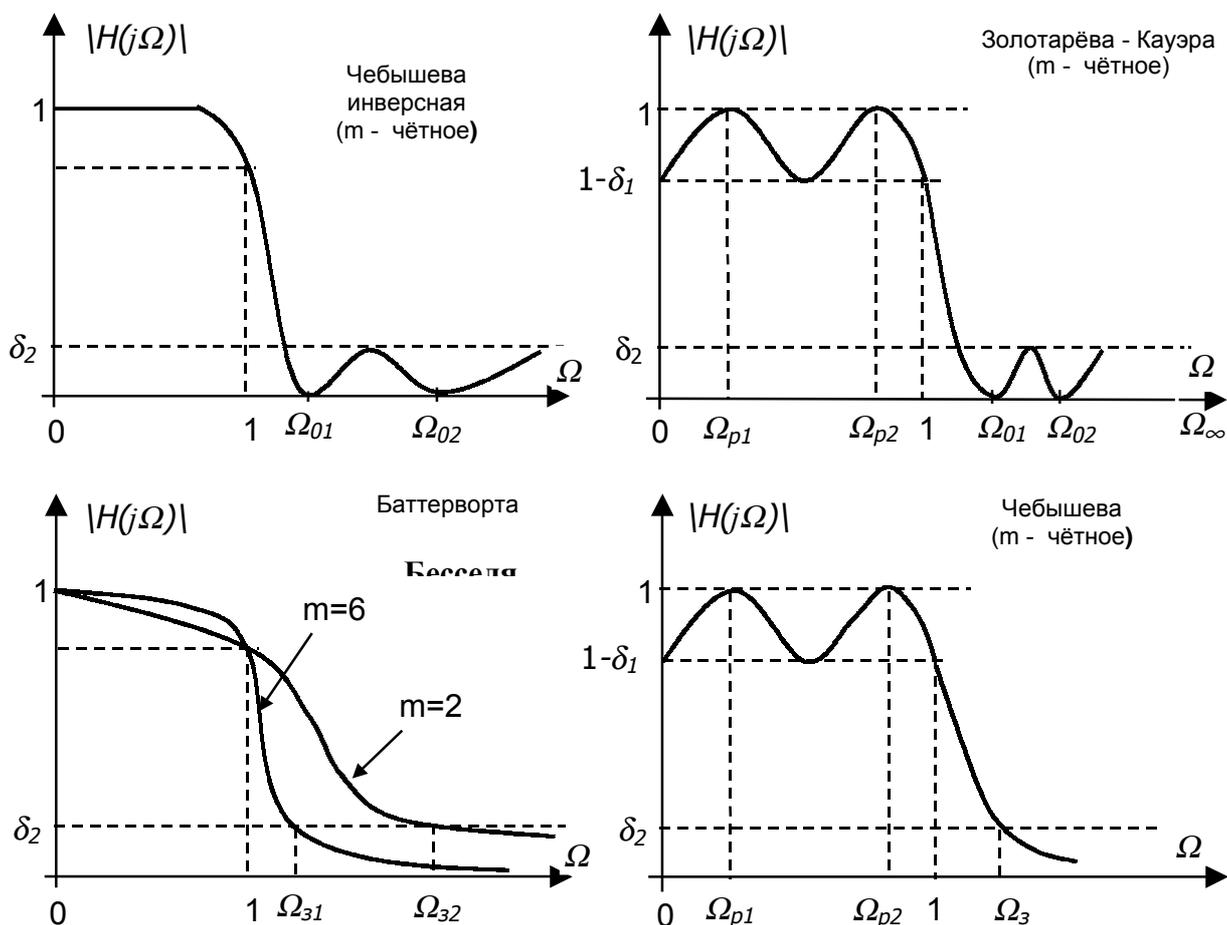


Рис. 3.4. Графики частотных характеристик нормализованного АФПНЧ, соответствующие различным аппроксимирующим функциям

3.2.6. ПЕРЕХОД ОТ АФПНЧ К ЦФ ЗАДАННОГО ТИПА

С помощью обобщенной преобразующей функции $p = f_{об}(z)$ передаточную функцию АФПНЧ можно непосредственно трансформировать в передаточную функцию ЦФ заданного типа:

$H(z) = H(p) | p = f_{об}(z)$. Приводя далее выражение для $H(z)$ к виду, соответствующему выбранной структуре ЦФ – каскадной или параллельной, можно найти **численные значения коэффициентов звеньев $b_{0j}, b_{1j}, b_{2j}, a_{1j}, a_{2j}$, необходимые для его реализации.**

Однако такой путь зачастую сопряжен с громоздкими математическими преобразованиями, особенно в случае ППФ и ПЗФ, порядок которых вдвое выше, чем у аналогового ФНЧ-прототипа, или при дробных аппроксимирующих функциях, порождающих конечные нули.

Более коротким и формализованным является путь, основанный на аналитической взаимосвязи между коэффициентами ЦФ конкретной структуры и его нулями и полюсами, которые, в свою очередь, могут быть найдены через нули и полюсы аналогового ФНЧ-прототипа с помощью обратных преобразующих функций $z = f^{-1}_{об}(p)$. Полученные таким образом выражения для нулей и полюсов ЦФ различного типа приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2.

Тип фильтра	Преобразование	Примечания
ФНЧ	$z_{p(0)i} = (\alpha + p_{p(0)i}) / (\alpha - p_{p(0)i}), \quad i = 1, 2, \dots, m$	При $p_{0i} = \infty$ $z_{0i} = -1$
ФВЧ	$z_{p(0)i} = -(\alpha + p_{p(0)i}) / (\alpha - p_{p(0)i}), \quad i = 1, 2, \dots, m$	При $p_{0i} = \infty$ $z_{0i} = 1$
ППФ	$z_{p(0)(2i-1,2i)} = \frac{\alpha\beta}{\alpha - p_{p(0)i}} \pm \left(\frac{(\alpha\beta)^2}{(\alpha - p_{p(0)i})^2} - \frac{\alpha + p_{p(0)i}}{\alpha - p_{p(0)i}} \right)^{1/2}$ $i = 1, 2, \dots, m$	При $p_{0i} = \infty$ $z_{0(2i-1,2i)} = \pm 1$
ПЗФ	$z_{p(0)(2i-1,2i)} = -\frac{\alpha\beta}{\alpha - p_{p(0)i}} \pm \left(\frac{(\alpha\beta)^2}{(\alpha - p_{p(0)i})^2} - \frac{\alpha + p_{p(0)i}}{\alpha - p_{p(0)i}} \right)^{1/2}$ $i = 1, 2, \dots, m$	При $p_{0i} = \infty$ $z_{0(2i-1,2i)} =$ $= \beta \pm (\beta^2 - 1)^{1/2}$

Передаточные функции звеньев второго порядка каскадной и параллельной структуры получают объединением в пары комплексно-сопряженных полюсов фильтров (для ППФ и ПЗФ одна пара может состоять и из вещественных полюсов) и группированием их в случае каскадной формы с ближайшими по расположению на комплексной Z-плоскости парами нулей, которые также могут быть комплексно-сопряженными или вещественными.

Число звеньев (L) ЦФ определяется его порядком M : при четном порядке $L = M/2$, при нечетном $L = (M+1)/2$, при этом одно звено имеет первый порядок. Ему соответствуют вещественные значения нуля и полюса.

Порядок цифровых ФНЧ и ФВЧ совпадает с порядком аналогового ФНЧ-прототипа ($M = m$), а ППФ и ПЗФ – в два раза больше ($M = 2m$).

Коэффициенты $b_{0J}, b_{1J}, b_{2J}, a_{1J}, a_{2J}$ звеньев находятся через нули и полюсы цифрового фильтра с помощью соотношений (2.57), (2.58), (2.60), (2.61), приведенных в главе 2.

Они определяют передаточную функцию ЦФ для выбранной его структуры, что отвечает конечной цели данного этапа синтеза ЦФ.

Результаты синтеза проверяются и уточняются путем расчета ЧХ синтезированного фильтра: $H(j\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_d}}$.

3.2.7. МЕТОДИКА СИНТЕЗА РФ ПО АНАЛОГОВОМУ ПРОТОТИПУ

Синтез РФ включает следующие этапы:

1. С помощью частотных преобразований $\Omega = f_{об}(\lambda)$ табл. 3.1. по заданным значениям граничных частот ЦФ: $f_c, f_3, (\lambda_c, \lambda_3)$ находятся граничные частоты аналогового ФНЧ-прототипа $\Omega_c = 1; \Omega_3 = f_{об}(\lambda_3)$.

2. По значениям a_n, a_3 и Ω_3 синтезируется АФПНЧ: выбирается тип аппроксимирующей функции, определяются порядок фильтра m и значения его полюсов и нулей: $p_{pi}, p_{oi}, i = 1, 2, \dots, m$.

3. По соотношениям табл. 3.2 рассчитываются значения полюсов и нулей ЦФ заданного типа:

$$z_{pk} = f_{об}^{-1}(p_{pi}); \quad z_{ok} = f_{об}^{-1}(p_{oi}),$$

где $k = 1, 2, \dots, M; M$ – порядок ЦФ: $M = m$ для ФНЧ, ФВЧ и $M = 2m$ для ППФ и ПЗФ.

4. На комплексной Z -плоскости строится картина нулей и полюсов ЦФ, каждому J -му звену ЦФ ставится в соответствие комплексно-сопряженная или вещественная пара полюсов, а в случае каскадной формы реализации – ближайшая к ней по расположению пара конечных комплексно-сопряженных или вещественных нулей $(z_{p1,2})_J, (z_{o1,2})_J, J = 1, 2, \dots, L$.

5. Выбирается структура фильтра – каскадная или параллельная и рассчитываются коэффициенты ее звеньев $a_{1J}, a_{2J}, b_{0J}, b_{1J}, b_{2J}$ по соотношениям, приведенным в главе 2.

6. Рассчитывается АЧХ и ФЧХ фильтра и сопоставляется с заданной.

7. Находится минимально необходимая разрядность коэффициентов фильтра, при которой АЧХ еще удовлетворяет заданным требованиям (по параметрам неравномерности и затухания a_n, a_3).

8. Решаются задачи, связанные с конечной разрядностью чисел и моделированием фильтра на ЭВМ (глава 4).

3.2.8. ПРИМЕР СИНТЕЗА ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ РФ

В соответствии с методом билинейного преобразования синтезирован рекурсивный полосно-пропускающий фильтр, заданный параметрами своей частотной характеристики. Синтез выполнен с помощью программы РФФ-СИНТЕЗ, разработанной студентами Захарченко М.О., Ставер В.В. под руководством автора. Ниже приводятся данные и графики, выводимые программой, которая автоматически ведет протокол расчетов, начиная с ввода пользователем исходных данных. Для сопоставления рассчитаны необходимые порядки АФПНЧ для аппроксимирующих функций Баттерворта, Чебышева (прямой и инверсной) и Золотарева – Кауэра. В качестве прототипа цифрового фильтра принят аналоговый фильтр Золотарева – Кауэра, называемый также эллиптическим.

Тип фильтра - Полосовой

```

----- Граничные частоты ЦФ -----
Первая частота среза                Fc1 = 8400
Вторая частота среза                Fc2 = 11600
Первая частота задерживания         Fz1 = 7600
Вторая частота задерживания         Fz2 = 12400
----- Требования к АЧХ ЦФ -----
Неравномерность в полосе пропускания  Ап = 1.000
Затухание в полосе задерживания       Az = 40.000
Частота дискретизации                 Fd = 112000
Нормированная частота среза АФПНЧ    = 1.0000000
Нормированная частота задерживания АФПНЧ = 1.4303418

----- Синтез АФПНЧ -----
Аппроксимация Баттерворта (по Тейлору)
Порядок АФПНЧ                        = 15
----- Синтез АФПНЧ -----
Аппроксимация Чебышева прямая
Порядок АФПНЧ                        = 7
----- Синтез АФПНЧ -----
Аппроксимация Чебышева инверсная
Порядок АФПНЧ                        = 7
----- Синтез АФПНЧ -----
Аппроксимация Золотарева-Кауэра (эллиптическая)
Порядок АФПНЧ                        = 5
---- Полюса АФПНЧ
Pr[1]=-0.227645373 + (-0.691258748)*j
Pr[2]=-0.227645373 + (0.691258748)*j
Pr[3]=-0.063690094 + (-0.995808482)*j
Pr[4]=-0.063690094 + (0.995808482)*j
Pr[5]=-0.345050270 + (0.000000000)*j
---- Нули АФПНЧ
Pz[1]=0.000000000 + (-2.197510941)*j
Pz[2]=0.000000000 + (2.197510941)*j
Pz[3]=0.000000000 + (-1.482755953)*j
Pz[4]=0.000000000 + (1.482755953)*j
Pz[5]= бесконечен

----- Результаты билинейного преобразования -----
Порядок ЦФ                            = 10
Нормирующий множитель фильтра         C = 0.001484825408
---- Полюса ЦФ
Zp[1]=0.863876936 + (0.466514453)*j
Zp[2]=0.863876936 + (-0.466514453)*j
Zp[3]=0.796109586 + (-0.567716076)*j
Zp[4]=0.796109586 + (0.567716076)*j

```

```

Zp[5]=0.790741976 + (-0.601510989)*j
Zp[6]=0.790741976 + (0.601510989)*j
Zp[7]=0.886540728 + (0.452042343)*j
Zp[8]=0.886540728 + (-0.452042343)*j
Zp[9]=0.824540464 + (0.509797598)*j
Zp[10]=0.824540464 + (-0.509797598)*j

```

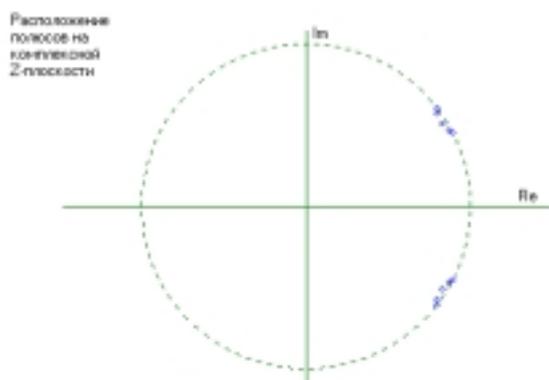
---- Нули ЦФ

```

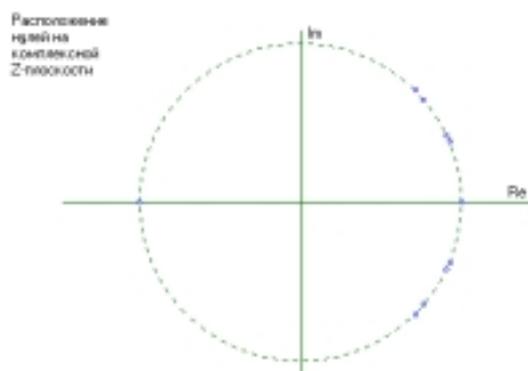
Zo[1]=0.925200000 + (0.379479855)*j
Zo[2]=0.925200000 + (-0.379479855)*j
Zo[3]=0.711087038 + (0.703103992)*j
Zo[4]=0.711087038 + (-0.703103992)*j
Zo[5]=0.906492380 + (0.422222176)*j
Zo[6]=0.906492380 + (-0.422222176)*j
Zo[7]=0.764050169 + (0.645156833)*j
Zo[8]=0.764050169 + (-0.645156833)*j
Zo[9]=1.000000000 + (0.000000000)*j
Zo[10]=-1.000000000 + (0.000000000)*j

```

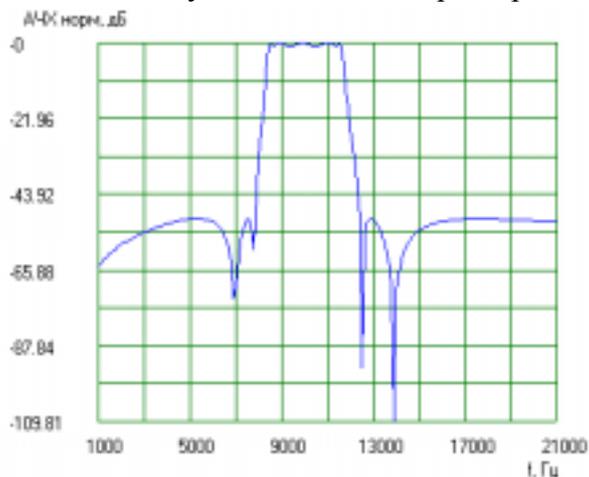
Картина полюсов ЦФ



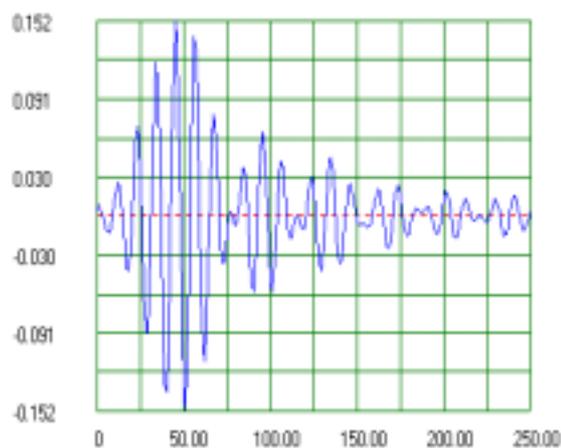
Картина нулей ЦФ



Амплитудно-частотная характеристика ЦФ



Импульсная характеристика ЦФ



Коэффициенты РЦФ каскадной формы реализации
Количество звеньев = 5

```

-----
b0[1]= 1 b1[1]= -1.8504      b2[1]= 1 a1[1]= -1.72775387  a2[1]= 0.963919096
b0[2]= 1 b1[2]= -1.42217408  b2[2]= 1 a1[2]= -1.59221917  a2[2]= 0.956092015
b0[3]= 1 b1[3]= -1.81298476  b2[3]= 1 a1[3]= -1.58148395  a2[3]= 0.987088342
b0[4]= 1 b1[4]= -1.52810034  b2[4]= 1 a1[4]= -1.77308146  a2[4]= 0.990296742
b0[5]= 1 b1[5]= 0             b2[5]=-1 a1[5]= -1.64908093  a2[5]= 0.939760568

```

Коэффициенты РЦФ параллельной формы реализации
Количество звеньев = 5

```
-----
b0[1]=-25.009829 b1[1]=24.160216 b2[1]= 0 a1[1]=-1.7277538 a2[1]= 0.96391909
b0[2]=-17.752916 b1[2]=28.668925 b2[2]= 0 a1[2]=-1.5922191 a2[2]= 0.95609201
b0[3]= 1.6675599 b1[3]=-6.678022 b2[3]= 0 a1[3]=-1.5814839 a2[3]= 0.98708834
b0[4]= 6.6073541 b1[4]=-5.108268 b2[4]= 0 a1[4]=-1.7730814 a2[4]= 0.99029674
b0[5]= 36.197792 b1[5]=-42.57829 b2[5]= 0 a1[5]=-1.6490809 a2[5]= 0.93976056
```

3.3. СИНТЕЗ НЕРЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ МЕТОДОМ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

3.3.1. ОСНОВЫ МЕТОДА

Синтез НФ (КИХ-фильтров) выполняется по заданной идеализированной частотной характеристике фильтра $H_d(j\omega)$ с нулевым запаздыванием и допустимым погрешностям ее аппроксимации (рис. 3.1). Он заключается в поиске импульсной характеристики фильтра $h(n)_N$ конечной длины N , являющейся коэффициентами его передаточной функции $H(z) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{-m}$.

Учитывая, что частотная характеристика и импульсная характеристика связаны парой преобразований Фурье, с помощью обратного преобразования Фурье может быть найдена импульсная характеристика $h_d(n)$, которая соответствует заданной идеализированной частотной характеристике:

$$h_d(n) = \frac{T_d}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} H_d(j\omega) e^{j\omega n T_d} d\omega. \quad (3.4)$$

Однако импульсная характеристика (3.4) идеального фильтра имеет бесконечную длину и не отвечает условию физической реализуемости: при $n < 0$ $h_d(n) \neq 0$ – отклик фильтра опережает входное воздействие. Поэтому она не может быть непосредственно использована в качестве импульсной характеристики НФ.

Например, для цифрового ФНЧ в основной полосе частот $\pm\omega_d/2$.

$$H_d(j\omega) = \begin{cases} 1, & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & \text{для других } \omega \end{cases}$$

$$h_d(m) = \frac{T_d}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} H_d(j\omega) e^{j\omega m T_d} d\omega = \frac{\omega_c T_d}{\pi} \frac{\sin \omega_c m T_d}{\omega_c m T_d} = \frac{\lambda_c}{\pi} \frac{\sin \lambda_c m}{\lambda_c m} \quad (\text{рис. 3.5}).$$

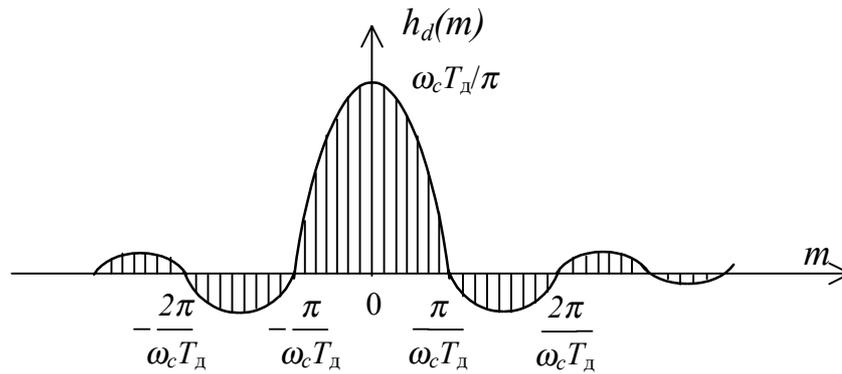


Рис. 3.5. Импульсная характеристика идеального ФНЧ

Аналитические описания импульсных характеристик других типов ЦФ приведены в п. 3.3.6.

Получить на основе импульсной характеристики (3.4) физически реализуемый КИХ-фильтр с частотной характеристикой, близкой к заданной, можно путем сдвига $h_d(n)$ вправо на $(N - 1)/2$ отсчетов и усечения ее за пределами $n < 0$ и $n \geq N$. При этом частотная характеристика фильтра аппроксимируется усеченным рядом Фурье с коэффициентами $h_d[n - (N - 1)/2]$:

$$H(j\omega) = \sum_{m=0}^{N-1} h_d[m - (N - 1)/2] e^{-j\omega m T_d}.$$

Известно, что простое усечение ряда Фурье сопровождается колебаниями Гиббса, возникающими при аппроксимации разрывных функций.

Для улучшения качества аппроксимации в методе весовых функций импульсную характеристику НФ конструируют ограничением длины импульсной характеристики $h_d[n - (N - 1)/2]$ с помощью специальных весовых функций или окон $w(n)$ конечной длины N :

$$h(n) = h_d\left(n - \frac{N-1}{2}\right) w(n). \quad (3.5)$$

Простое усечение эквивалентно умножению на прямоугольную весовую функцию $w_R(n) = 1, n = 0, \dots, N-1$.

Полученной таким образом импульсной характеристике соответствует частотная характеристика фильтра $H(j\omega) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) e^{-j\omega m T_d}$, определяемая сверткой в частотной области заданной частотной характеристики $H_d(j\omega)$ с частотной характеристикой (Фурье-образом) весовой функции $W(j\omega)$:

$$H(j\omega) = W(j\omega) * H_d(j\omega) = \frac{T_d}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} W(j\theta) H_d[j(\omega - \theta)] d\theta,$$

где * – символ свертки, θ – переменная интегрирования,

$W(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n) e^{-j\omega n T_d}$ – частотная характеристика весовой функции.

Данные преобразования во временной и частотной области иллюстрируются графиками рис. 3.6, достаточно наглядно отражающими влияние весового усечения на качество аппроксимации заданной частотной характеристики усеченным рядом Фурье.

Частотная характеристика весовой функции на рис. 3.6 имеет главный лепесток шириной $\Delta\omega_{\text{гл}}$ и боковые лепестки, уровень которых характеризуется максимальным по модулю значением $\delta_{\text{блmax}}$ и площадью под боковыми лепестками. Свертка в частотной области осуществляется графически путем смещения по частоте в пределах $\pm\omega_d/2$ зеркально отображенной частотной характеристики весовой функции и вычисления площади перекрытия ее с заданной частотной характеристикой $H_d(j\omega)$.

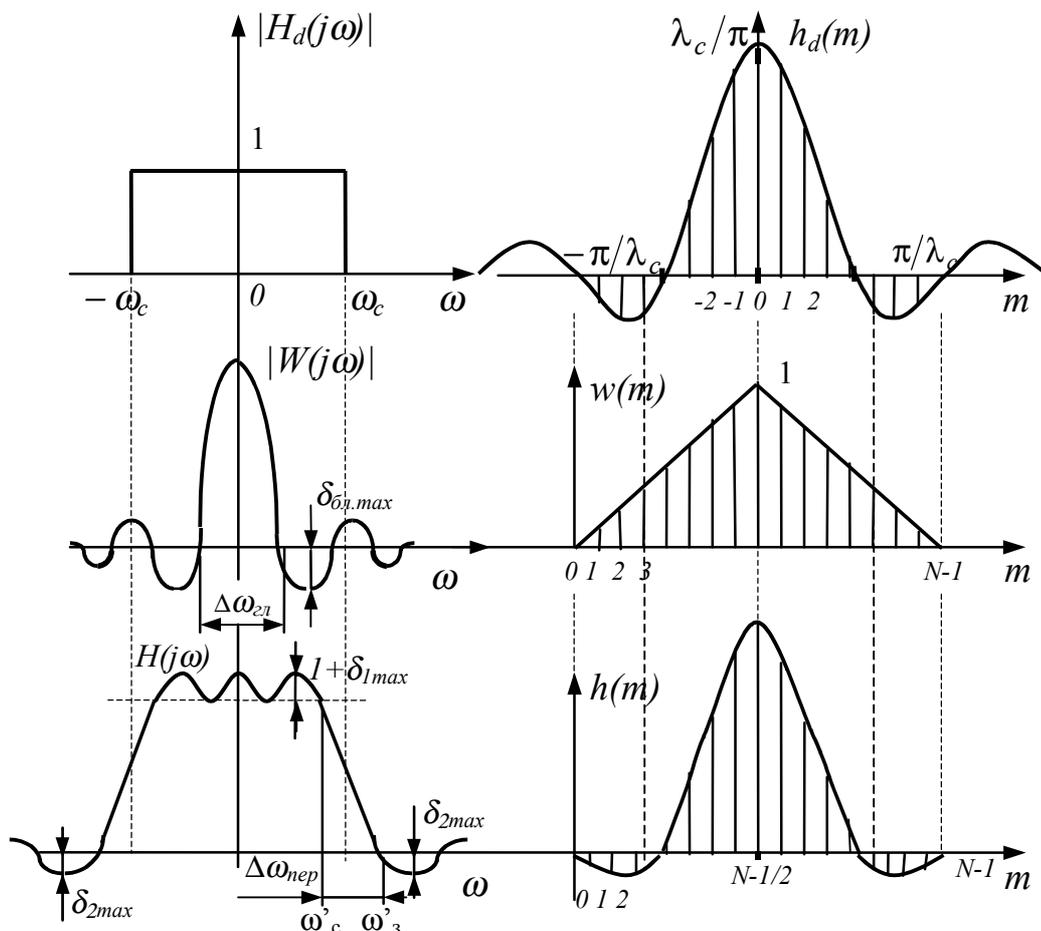


Рис. 3.6. Графическая иллюстрация синтеза НФ методом весовых функций

Из рисунка следует, что **переходная полоса частотной характеристики фильтра $H(j\omega)$ определяется шириной главного лепестка частотной характеристики весовой функции: $\Delta\omega_{пер} \approx \Delta\omega_{гл}$, а погрешности аппроксимации (пульсации) в полосе пропускания и задерживания δ_1, δ_2 связаны с уровнем ее боковых лепестков. Это определяет требования к весовой функции, которая должна иметь:**

минимальную ширину главного лепестка $\Delta\omega_{гл}$;

минимальный уровень боковых лепестков $\delta_{блmax}$ и минимальную площадь под боковыми лепестками;

минимальную длину N .

Требования эти достаточно противоречивы. Так, более гладкие весовые функции имеют меньший уровень боковых лепестков, но большую ширину главного лепестка, уменьшающуюся с увеличением длины весовой функции N . Этим объясняется многообразие используемых на практике типов весовых функций. Рассмотрим параметры и математические описания некоторых из них.

3.3.2. ПАРАМЕТРЫ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

В табл. 3.3 приведены используемые при синтезе ЦФ параметры весовых функций прямоугольной, треугольной, Ханна, Хэмминга и Блэкмана. Кроме значений ширины главного лепестка $\Delta\omega_{гл} = D\omega_d/N$, где D – так называемый D -фактор, и максимального уровня боковых лепестков $\delta_{блmax}$ они включают в себя также оценочные значения погрешности аппроксимации частотной характеристики в полосе задерживания (максимальные пульсации частотной характеристики) $|\delta_{2max}|$, дБ, рассчитанные для цифрового ФНЧ с частотой среза $\lambda_c = \pi/4$ [14]. Такие же погрешности имеют место и при синтезе ФВЧ. Для ЦФ с двумя и более частотами среза (ППФ, ПЗФ, МПФ) в зависимости от конкретных данных погрешность аппроксимации может быть больше ее оценочного значения, но не более чем на 6 дБ.

Таблица 3.3.

№	Тип	$\Delta\omega_{гл}$	$\delta_{блmax}$, дБ	$ \delta_{2max} $, дБ
1	Прямоугольная	$2\omega_d/N$	-13,6	-21
2	Треугольная	$4\omega_d/N$	-27	-26
3	Ханна	$4\omega_d/N$	-31	-44
4	Хэмминга	$4\omega_d/N$	-41	-53
5	Блэкмана	$6\omega_d/N$	-57	-74

Руководствуясь данными табл. 3.3, можно по требуемому затуханию частотной характеристики в полосе задерживания α_3 сделать выбор типа весовой функции.

3.3.3. ОПИСАНИЯ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

Простейшая весовая функция – **прямоугольная** – имеет минимальную ширину главного лепестка и максимальный уровень боковых лепестков. Частотная характеристика ее (рис. 3.7а) определяется выражением

$$W_R(j\omega) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2} T_d} \cdot \frac{\sin(\omega N T_d / 2)}{\sin(\omega T_d / 2)}.$$

Боковые лепестки весовой функции имеют ширину $\Delta\omega_{\text{бл}} = \omega_d/N$ или $\Delta\lambda_{\text{бл}} = 2\pi/N$. При $\lambda = 0$ $|W_R(j\lambda)| = N$.

Треугольная весовая функция является сверткой двух прямоугольных весовых функций длиной $N/2$:

$$w_T(n) = w_R(n) * w_R(n) = \begin{cases} 2n/(N-1), & 0 \leq n \leq (N-1)/2 \\ 2 - 2n/(N-1), & (N-1)/2 < n \leq (N-1) \end{cases}.$$

У нее вдвое большая ширина главного лепестка при достаточно большом уровне боковых лепестков.

Частотная характеристика треугольной весовой функции равна квадрату частотной характеристики прямоугольной весовой функции половинной длины:

$$|W_T(j\omega)| = \sin^2(\omega T_d N / 4) / \sin^2(\omega T_d / 2).$$

Боковые лепестки ее имеют ширину $\Delta\omega_{\text{бл}} = 2\omega_d/N$ или $\Delta\lambda_{\text{бл}} = 4\pi/N$.

Обобщенная весовая функция **Хэмминга** описывается выражением

$$w_H(n) = \alpha - (1 - \alpha) \cos[2\pi n / (N - 1)].$$

При $\alpha = 0.5$ она соответствует весовой функции Ханна, при $\alpha = 0.54$ – весовой функции Хэмминга (рис. 3.7, б).

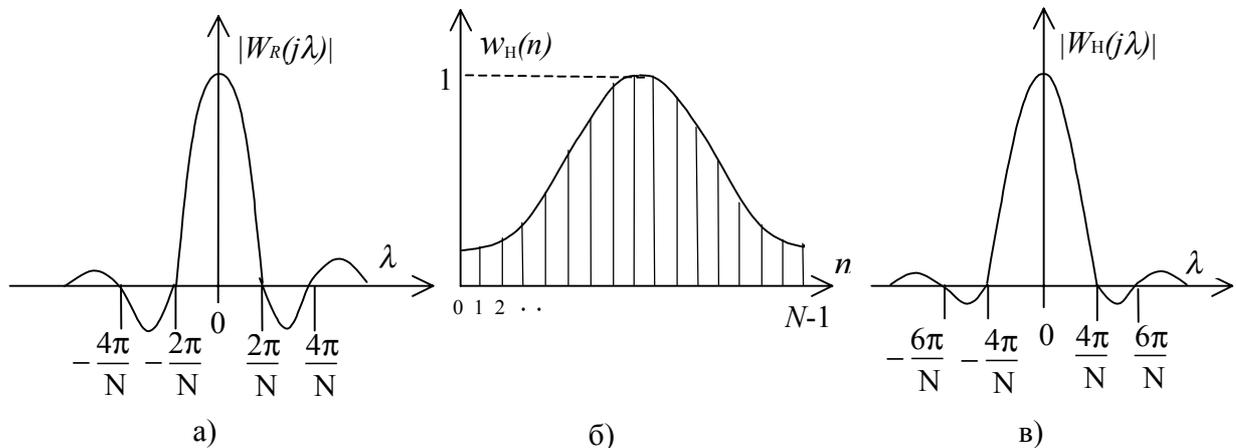


Рис. 3.7. Частотная характеристика прямоугольной весовой функции (а),

весовая функция Хэмминга (б) и ее частотная характеристика (в)
Уровень боковых лепестков весовой функции Хэмминга оказывается приемлемым для многих приложений НФ.

Частотную характеристику весовой функции Хэмминга (рис. 3.7, в) можно представить суммой трех частотных характеристик прямоугольных весовых функций с центральными частотами $\omega_0 = 0$ и $\omega_0 = \pm\omega_d/N$:

$$W_H(j\omega T_d) = \alpha W_R(j\omega T_d) + \frac{1-\alpha}{2} W_R\left[j\left(\omega T_d - \frac{2\pi}{N}\right)\right] + \frac{1-\alpha}{2} W_R\left[j\left(\omega T_d + \frac{2\pi}{N}\right)\right].$$

Боковые лепестки частотной характеристики имеют ширину $\Delta\omega_{\text{бл}} = \omega_d/N$ или $\Delta\lambda_{\text{бл}} = 2\pi/N$. Площадь под боковыми лепестками составляет 0,04 % от площади квадрата частотной характеристики весовой функции.

Весовая функция **Блэкмана** имеет вид

$$w_B(n) = 0,42 - 0,5 \cos[2\pi n / (N - 1)] + 0,08 \cos[4\pi n / (N - 1)].$$

По сравнению с весовой функцией Хэмминга у нее более широкий главный лепесток (в 1,5 раза) при очень малом уровне боковых лепестков.

Частотная характеристика весовой функции Блэкмана по сравнению с весовой функцией Хэмминга содержит два дополнительных слагаемых $0,04W_R[j(\omega \pm 2\omega_d/N)]$. Ширина боковых лепестков этой весовой функции $\Delta\omega_{\text{бл}} = \omega_d/N$ или $\Delta\lambda_{\text{бл}} = 2\pi/N$.

При синтезе НФ используются также эффективные весовые функции Ланцоша, Дольфа-Чебышева, Каппелини, и др. [20, 34], среди которых особое значение имеет класс весовых функций или окон Кайзера.

3.3.4. ВЕСОВЫЕ ФУНКЦИИ КАЙЗЕРА

В отличие от других весовых функций, характеризующихся постоянными значениями уровня боковых лепестков $\delta_{\text{блmax}}$ и отношения $D = N/(f_d/\Delta f_{\text{зл}}) = N/(f_d/\Delta f_{\text{неп}})$ (D -фактор), у весовых функций Кайзера эти параметры могут широко варьироваться с помощью коэффициента β , входящего в математическое выражение этой функции:

$$w_c(n) = I_0\left(\beta\sqrt{1 - [2n/(N-1)]^2}\right) / I_0(\beta),$$

где $I_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

Благодаря этому обеспечивается наилучшее для данного метода синтеза качество аппроксимации заданной частотной характеристики или наименьший порядок фильтра при заданном качестве аппроксимации.

Кайзером путем численного интегрирования свертки составлена таблица (табл. 3.4) и получены эмпирические формулы, которые позволяют непосредственно по заданному затуханию $a_3 = |\delta_{\text{блmax}}|$ (дБ) частотной

характеристики $H(j\omega)$, аппроксимирующей идеальный ФНЧ, выбрать или рассчитать значения D -фактора и коэффициенты β [15]:

$$D \approx (a_3 - 7,95)/14,36 \text{ при } a_3 > 21 \text{ дБ}; \quad D = 0,9222 \text{ при } a_3 < 21 \text{ дБ};$$

$$\beta = \begin{cases} 0,1102 (a_3 - 8,7), & \text{при } a_3 \geq 50 \text{ дБ} \\ 0,5842 (a_3 - 21)^{0,4} + 0,07886 (a_3 - 21), & \text{при } 21 < a_3 < 50 \text{ дБ} \\ 0, & \text{при } a_3 \leq 21 \text{ дБ} \end{cases}$$

По вычисленному или взятому из таблицы значению D определяется необходимый порядок фильтра $N \approx Df_d/\Delta f_{пер}$, который округляется затем до ближайшего большего нечетного числа.

Как и для других весовых функций, в случае аппроксимации идеальных фильтров типа ППФ, ПЗФ, МПФ затухание частотной характеристики в полосе задерживания может быть меньше его табличного значения, но не более чем на 6 дБ.

Таблица 3.4.

A_3 , дБ	β	D	a_3 , дБ	β	D
25	1,333	1,187	65	6,204	3,973
30	2,117	1,536	70	6,755	4,321
35	2,783	1,884	75	7,306	4,669
40	3,395	2,232	80	7,857	5,017
45	3,975	2,580	85	8,408	5,366
50	4,551	2,928	90	8,959	5,714
55	5,102	3,261	95	9,501	6,062
60	5,653	3,625	100	10,061	6,410

В табл. 3.5 приведены также расчетные значения уровня пульсаций частотной характеристики в полосе пропускания, соответствующие различным значениям затухания в полосе задерживания [15].

Таблица 3.5

a_3 , дБ	$1 \pm \delta_{lmax}$, дБ	a_3 , дБ	$1 \pm \delta_{lmax}$, дБ
30	± 0.27	70	± 0.0027
40	± 0.086	80	± 0.00086
50	± 0.027	90	± 0.00027
60	± 0.0086	100	± 0.000086

3.3.5. ИМПУЛЬСНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИДЕАЛЬНЫХ ЦФ РАЗЛИЧНОГО ТИПА

Аналитические описания импульсных характеристик ЦФ различного типа получаются в общем случае путем выполнения обратного преобразования Фурье их идеализированных частотных характеристик ЧХ $H_d(j\omega)$.

Для **идеального цифрового ФНЧ**, как показано выше, импульсная характеристика определяется выражением

$$h_d(0) = \frac{\lambda_c}{\pi}; \quad h_d(n) = \frac{\lambda_c}{\pi} \frac{\sin \lambda_c n}{\lambda_c n}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Импульсные характеристики **ЦФ** типов **ФВЧ**, **ППФ**, **ПЗФ** и **МПФ** могут быть выражены также через импульсную характеристику цифрового ФНЧ и так называемого всепропускающего фильтра (ВПФ). Для такого идеального фильтра сигнал на выходе совпадает с сигналом на входе:

$$y(n) = x(n); h_d(0) = 1; \quad h_d(n) = 0 \text{ при } n \neq 0; \quad H_d(j\omega) = 1 \text{ при } |\omega| \leq \omega_d/2.$$

Частотные характеристики ФВЧ, ППФ и ПЗФ связаны с частотной характеристикой ФНЧ и ВПФ соотношениями:

$$\begin{aligned} H_d(j\omega)_{\text{ФВЧ}} &= H_d(j\omega)_{\text{ВПФ}} - H_d(j\omega)_{\text{ФНЧ}}; \\ H_d(j\omega)_{\text{ППФ}} &= H_d(j\omega)_{\text{ФНЧ}_2} - H_d(j\omega)_{\text{ФНЧ}_1}; \\ H_d(j\omega)_{\text{ПЗФ}} &= H_d(j\omega)_{\text{ВПФ}} - H_d(j\omega)_{\text{ФНЧ}_2} + H_d(j\omega)_{\text{ФНЧ}_1}, \end{aligned}$$

где $H_d(j\omega)_{\text{ФНЧ}}$, $H_d(j\omega)_{\text{ФНЧ}_1}$ и $H_d(j\omega)_{\text{ФНЧ}_2}$ – частотные характеристики идеальных ФНЧ с частотами среза λ_c , λ_{c1} , λ_{c2} , ($\lambda_{c2} > \lambda_{c1}$), соответствующими частотам среза ФВЧ, ППФ и ПЗФ. Такая же связь справедлива и для импульсных характеристик, что позволяет непосредственно записать соответствующие им аналитические выражения:

$$\begin{aligned} h_d(0)_{\text{ФВЧ}} &= 1 - \frac{\lambda_c}{\pi}; \quad h_d(n) = -\frac{\lambda_c}{\pi} \frac{\sin \lambda_c n}{\lambda_c n}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots; \\ h_d(0)_{\text{ППФ}} &= \frac{\lambda_{c2}}{\pi} - \frac{\lambda_{c1}}{\pi}; \quad h_d(n)_{\text{ППФ}} = \frac{\lambda_{c2}}{\pi} \frac{\sin \lambda_{c2} n}{\lambda_{c2} n} - \frac{\lambda_{c1}}{\pi} \frac{\sin \lambda_{c1} n}{\lambda_{c1} n}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots; \\ h_d(0)_{\text{ПЗФ}} &= 1 - \frac{\lambda_{c2}}{\pi} + \frac{\lambda_{c1}}{\pi}; \quad h_d(n)_{\text{ПЗФ}} = \frac{\lambda_{c1}}{\pi} \frac{\sin \lambda_{c1} n}{\lambda_{c1} n} - \frac{\lambda_{c2}}{\pi} \frac{\sin \lambda_{c2} n}{\lambda_{c2} n}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Аналогичным образом находятся соотношения и для конкретного МПФ.

К ЦФ с нестандартными частотными характеристиками относятся **цифровой дифференциатор (ЦД)** и **преобразователь Гильберта (ПГ)**.

Идеальный ЦД имеет отличную от нуля частотную характеристику $H_d(j\omega) = j\omega / (\omega_d / 2)$ в полосе $-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$, ограниченной частотой среза ω_c .

Относительно цифровых частот $\lambda = \omega T_d$ частотная характеристика принимает вид $H_d(j\lambda) = j\lambda / \pi$, $-\lambda_c \leq \lambda \leq \lambda_c$. Частотной характеристике ЦД

соответствует импульсная характеристика $h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda_c}^{\lambda_c} \frac{j\lambda}{\pi} e^{j\lambda n} d\lambda$. С

помощью интегрирования по частям она приводится к следующему аналитическому выражению:

$$h_d(0)_{\text{ИД}} = 0; \quad h_d(n)_{\text{ИД}} = -\frac{1}{\pi^2 n^2} [\sin \lambda_c n - \lambda_c n \cos \lambda_c n], \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Идеальный ПГ полосового типа описывается частотной характеристикой:

$$H_d(j\omega) = \begin{cases} j/(\omega_d/2), & \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \\ -j/(\omega_d/2), & -\omega_{c1} \leq \omega \leq -\omega_{c2} \end{cases}$$

или

$$H_d(j\lambda) = \begin{cases} e^{j\frac{\pi}{2}} / \pi, & \lambda_{c1} \leq \lambda \leq \lambda_{c2} \\ e^{-j\frac{\pi}{2}} / \pi, & -\lambda_{c1} \leq \lambda \leq -\lambda_{c2} \end{cases},$$

где ω_{c2}, ω_{c1} ($\lambda_{c2}, \lambda_{c1}$) – верхние и нижние граничные частоты полосы пропускания ПГ. Очевидно, что АЧХ ПГ $|H_d(j\omega)| = 1$, а его ФЧХ $\varphi(\omega) = \pi/2$ при $\omega > 0$ и $\varphi(\omega) = -\pi/2$ при $\omega < 0$. Фильтр с частотной характеристикой ПГ используется для формирования комплексного или аналитического дискретного сигнала, а также в качестве квадратурного (90-градусного) широкополосного фазовращателя.

В результате вычисления интеграла

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_{c1}}^{\lambda_{c2}} \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{\pi} e^{j\lambda n} d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda_{c1}}^{-\lambda_{c2}} \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\pi} e^{j\lambda n} d\lambda.$$

получается следующее выражения для импульсной характеристики идеального ПГ:

$$h_d(0)_{\text{ИГ}} = 0; \quad h_d(n)_{\text{ИГ}} = \frac{1}{\pi n} [\cos \lambda_{c1} n - \cos \lambda_{c2} n], \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

3.3.6. МЕТОДИКА СИНТЕЗА НФ МЕТОДОМ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

1. По заданному значению затухания частотной характеристики в полосе задерживания a_3 с помощью табл. 3.3 выбирается тип весовой функции, отвечающей условию $|\delta_{2max}|, \text{ дБ} \geq a_3, \text{ дБ}$, при минимальном значении ширины ее главного лепестка, т. е. параметра D . При использовании весовой функции Кайзера по табл. 3.4 находятся соответствующие заданному затуханию a_3 параметры данной весовой функции β и D . При этом нужно учитывать, что расчетное значение затухания зависит от вида АЧХ синтезируемого фильтра, его граничных частот и длины весовой функции N и может оказаться как больше, так и меньше оценочного значения δ_{2max} . Чем сложнее АЧХ фильтра (ППФ, ПЗФ, МПФ), тем меньше затухание для одной

и той же весовой функции. Это же относится и к неравномерности АЧХ в полосе пропускания.

2. Для выбранной весовой функции и заданной переходной полосы частотной характеристики фильтра $\Delta f_{nep} = |f_3 - f_c|_{min}$ в соответствии с приближенным соотношением $\Delta f_{zl} = \Delta f_{nep} = Df_d/N$ находится необходимая длина весовой функции и определяемая ею длина импульсной характеристики фильтра: $N \geq Df_d / \Delta f_{nep}$, где D – коэффициент (D-фактор), зависящий от типа весовой функции (см. табл. 3.3, 3.4).

Значение N приравнивается ближайшему целому числу, обычно нечетному.

3. С помощью обратного преобразования Фурье

$$h_d(m) = \frac{T_d}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} H_d(j\omega) e^{-j\omega m T_d} d\omega$$

или приведенных выше аналитических выражений вычисляется смещенная вправо импульсная характеристика $h_d(m - (N - 1)/2)$, $m = 0 \dots N - 1$, соответствующая заданной частотной характеристике $H_d(j\omega)$.

При этом в качестве частот среза заданной частотной характеристики используют их расчетные значения f_{cp} , смещенные в полосу задерживания примерно на половину переходной полосы фильтра Δf_{nep} . Это связано со свойственным данному методу размытием границ перехода от полосы пропускания фильтра к полосе задерживания (рис. 3.7). Например, для ППФ

$$f_{c1p} \approx f_{c1} - \Delta f_{nep} / 2; \quad f_{c2p} \approx f_{c2} + \Delta f_{nep} / 2.$$

4. Находится импульсная характеристика фильтра путем весового усечения смещенной вправо на $(N - 1)/2$ отсчетов импульсной характеристики $h_d(m)$:

$$h(m) = h_d \left(m - \frac{N-1}{2} \right) w(m), \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$$

5. Рассчитывается АЧХ фильтра $H(j\omega) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) e^{-j\omega m T_d}$ и проверяется

ее соответствие исходным данным по неравномерности частотной характеристики в полосе пропускания a_n и затуханию в полосе задерживания a_3 .

6. Так как данный метод не обеспечивает точного соответствия исходных и расчетных данных (является итерационным), при необходимости корректируются значения расчетных частот среза f_{c1p} , f_{c2p} и длины фильтра N и расчеты повторяются.

7. Находится минимально необходимая разрядность значений

импульсной характеристики $h(m)$ (коэффициентов фильтра, реализуемого на основе ДВС), при которой расчетная АЧХ еще удовлетворяет заданным требованиям.

8. ВЫБИРАЕТСЯ СПОСОБ РЕАЛИЗАЦИИ НФ (НА ОСНОВЕ ДВС, ДПФ ИЛИ ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ) И РЕШАЮТСЯ СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ЕМУ ЗАДАЧИ РЕАЛИЗАЦИИ.

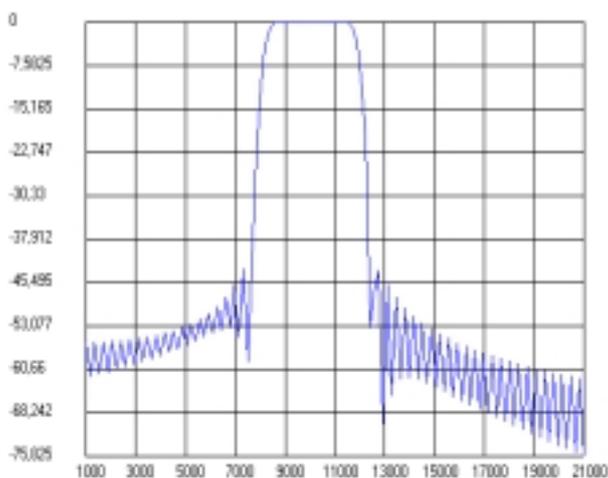
Следует отметить, что метод весовых функций обеспечивает строгую линейность ФЧХ и постоянство группового времени запаздывания фильтра ввиду четной или нечетной симметрии получаемой этим методом импульсной характеристики $h(m) = h(N - 1 - m)$ (см. параграфы 2.10, 2.11).

3.3.7. ПРИМЕР СИНТЕЗА ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ НФ МЕТОДОМ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

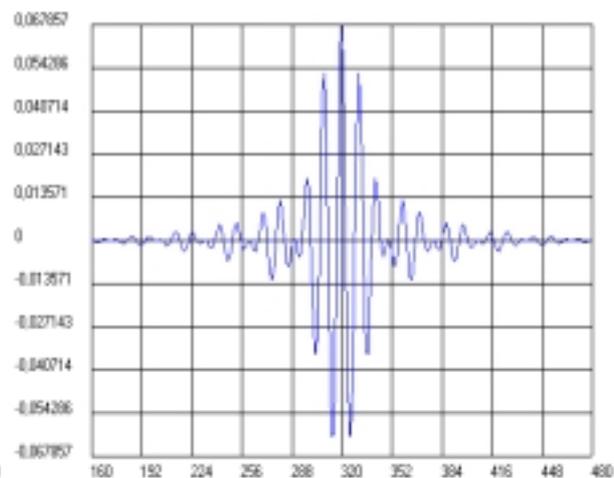
Методом весовых функций синтезирован НФ с заданными параметрами частотной характеристики, аналогичными РФ, синтезированному методом билинейного преобразования (см. п. 3.2.8). Синтез выполнен с помощью программы НФВФ-СИНТЕЗ, разработанной студентами Захарченко М.О., Ставер В.В. под руководством автора. Ниже приводятся данные из протокола расчетов и графики, выводимые программой.

Тип фильтра - Полосовой	
Первая частота среза фильтра	= 8100 Гц
Вторая частота среза фильтра	= 11900 Гц
Первая частота задерживания фильтра	= 7600 Гц
Вторая частота задерживания фильтра	= 12400 Гц
Затухание в полосе задерживания A_z	= 40 дБ
Неравномерность в полосе пропускания A_p	= 1 дБ
Тип весовой функции - Блэкмана	
Число отсчетов весовой функции	= 457
Тип весовой функции - Хемминга	
Число отсчетов весовой функции	= 341
Тип весовой функции - Кайзера	
Параметр БЕТА =3,5	
Число отсчетов весовой функции	= 321
Частота дискретизации	= 1,12E5 Гц

АЧХ НФ с ВФ Кайзера



Импульсная характеристика НФ



3.4. СИНТЕЗ НЕРЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ МЕТОДОМ ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ

3.4.1. ОСНОВЫ МЕТОДА

В методе частотной выборки импульсная характеристика фильтра $h(n)_N$ находится путем дискретизации по частоте заданной частотной характеристики $H_d(j\omega)$ и вычисления ее обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ).

Дискретизация частотной характеристики $H_d(j\omega)$ по частоте осуществляется в полосе $0 \dots \omega_d$ путем перехода от непрерывных значений частоты ω к дискретным: $\omega_k = \Delta\omega k$, где $k = 0, 1, \dots, N-1$; $\Delta\omega = \omega_d/N$ – шаг дискретизации; k – номер частотной выборки; N – число точек дискретизации. Расположение частот выборок на окружности $e^{j\omega_k T_d}$ комплексной Z -плоскости для четного и нечетного значений N показано на рис. 3.8.

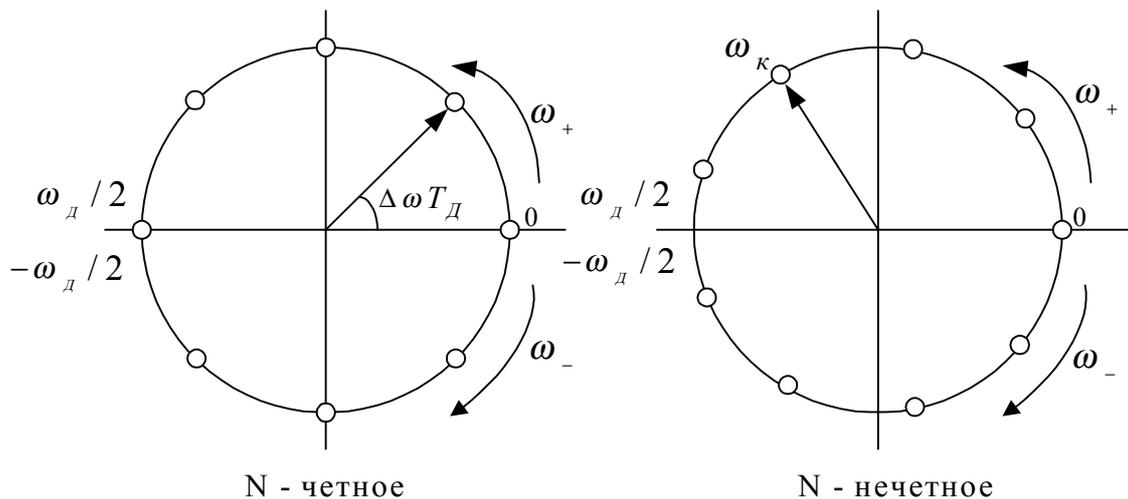


Рис. 3.8. Расположение точек дискретизации ЧХ на комплексной плоскости

Шаг дискретизации по частоте $\Delta\omega$ выбирается из условия $\Delta\omega \leq \Delta\omega_{пер}/(L+1)$, где L – целые числа, $L = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta\omega_{пер}$ – переходная полоса фильтра.

В результате получается **дискретизированная частотная характеристика** фильтра (ДЧХ) $H_d(j\omega_k) = H_d(j\omega)|_{\omega=\omega_k}$ (рис. 3.9). Так как заданная частотная характеристика соответствует физически нереализуемому фильтру с нулевым запаздыванием, то для ЦФ со ступенчатообразными АЧХ дискретизированная частотная характеристика отождествляется далее с их дискретизированной АЧХ.

Дискретизация частотной характеристики на рис. 3.9 выполнена с шагом $\Delta\omega = \Delta\omega_{пер}/2$ ($L=1$).

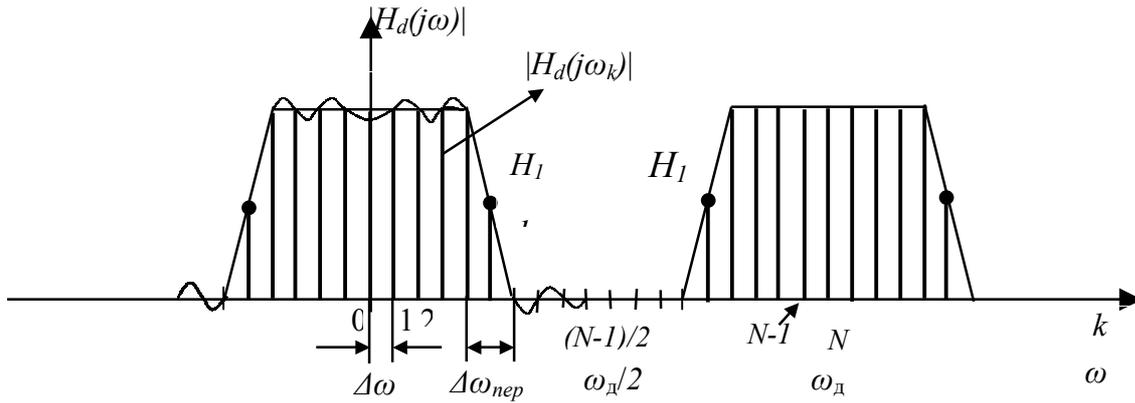


Рис. 3.9. Дискретизированная ЧХ цифрового фильтра нижних частот

ДЧХ имеет значения, равные в полосе пропускания 1 ($H_d(j\omega_k) = 1$), в полосе задерживания – нулю ($H_d(j\omega_k) = 0$) и в переходной полосе – некоторым промежуточным варьируемым (оптимизируемым) значениям $H_d(j\omega_k) = H_1 = \text{var}$, от которых зависит качество аппроксимации заданной частотной характеристики.

ДЧХ $H_d(j\omega_k)$ можно поставить в соответствие некоторую импульсную характеристику $h_p(m)$, определяемую с помощью обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ), получаемого путем дискретизации по частоте общего выражения для импульсной характеристики $h_d(m)$, соответствующей заданной (непрерывной) частотной характеристике $H_d(j\omega)$:

$$h_d(m) = \frac{T_d}{2\pi} \int_0^{\omega_d} H_d(j\omega) \cdot e^{j\omega m T_d} d\omega.$$

Выполняя замены: $\omega \rightarrow \omega_k$; $d\omega \rightarrow \Delta\omega = \omega_d / N$; $\int \rightarrow \sum_{k=0}^{N-1}$, получим импульсную характеристику $h_p(m)$:

$$h_p(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(j\omega_k) \cdot e^{j\omega_k m T_d} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(j\omega_k) \cdot e^{j\omega_k (m+iN) T_d},$$

где $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$.

Индекс “ p ” означает, что эта импульсная характеристика является периодической с периодом $N_p = N$, т. к. дискретизации в частотной области соответствует периодизация во временной области (рис. 3.10).

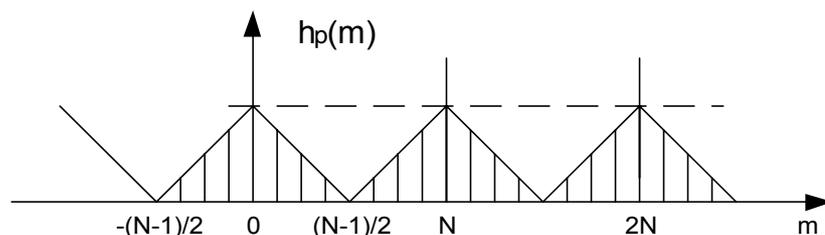


Рис.3.10. Импульсная характеристика, соответствующая ДЧХ

В качестве импульсной характеристики синтезируемого методом частотной выборки НФ выбирается один период импульсной характеристики $h_p(m)$, сдвинутый вправо на $(N - 1)/2$ отсчетов (для обеспечения физической реализуемости) и усеченный прямоугольной весовой функцией (для получения КИХ-фильтра) (рис. 3.11):

$$h(m) = h_p\left(m - \frac{N-1}{2}\right), \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$$

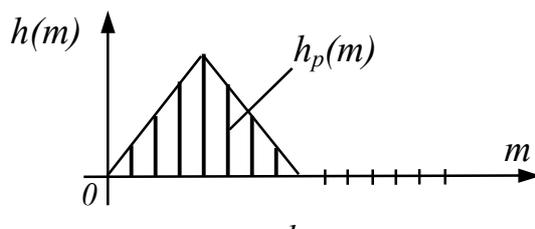


Рис. 3.11. Импульсная характеристика НФ, синтезированного методом частотной выборки

По импульсной характеристике $h(m)$ находится частотная характеристика фильтра $H(j\omega)$, аппроксимирующая заданную:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \sum_{m=0}^{N-1} h(m) e^{-j\omega m T_d} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} H_d(j\omega_k) \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\omega_k \left(m - \frac{N-1}{2}\right) T_d} e^{-j\omega m T_d} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(j\omega_k) e^{-j\omega_k \frac{N-1}{2} T_d} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j(\omega - \omega_k) m T_d} = \\ &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2} T_d} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(j\omega_k) \frac{\sin \frac{\omega - \omega_k}{2} N T_d}{\sin \frac{\omega - \omega_k}{2} T_d}. \end{aligned}$$

(При выводе использовано выражение для суммы конечного числа членов геометрической прогрессии).

В этом выражении множитель $e^{-j\omega \frac{N-1}{2} T_d}$ определяет ФЧХ фильтра: $\varphi(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2} T_d$, которая строго линейна вследствие симметрии импульсной характеристики.

АЧХ фильтра на частотах $\omega = \omega_k$: $H(\omega_k) = H_d(\omega_k)$ точно совпадает с частотными выборками ДЧХ, а на частотах $\omega \neq \omega_k$ $H(\omega) \neq H_d(\omega)$ — отличается от заданной на величину погрешности аппроксимации (пунктир на рис. 3.9).

С учетом свойств четной симметрии АЧХ: $|H_d(j\omega_k)| = |H_d(j\omega_{N-k})|$ и нечетной симметрии ФЧХ: $\varphi(\omega_k) = -\varphi(\omega_{N-k})$ выражение для частотной характеристики фильтра преобразуется к более удобному для расчетов виду:

$$|H(j\lambda)| = \sum_{k=1}^{k_g} \frac{|H_d(j\lambda_k)|}{N/2} \left[\frac{\sin\left(\frac{\lambda - \lambda_k}{2} N\right)}{\sin\left(\frac{\lambda - \lambda_k}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\lambda + \lambda_k}{2} N\right)}{\sin\left(\frac{\lambda + \lambda_k}{2}\right)} \right] + \left(\frac{|H_d(0)|}{N} \right) \frac{\sin\left(\frac{\lambda N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)}.$$

Фазовый множитель $e^{-j\omega \frac{N-1}{2} T_d}$ в этом выражении опущен; $\lambda = \omega T_d$. Верхний предел суммирования $k_g = (N-1)/2$ – при нечетном N и $k_g = (N/2) - 1$ – при четном. В случае четного N для фильтра с линейной ФЧХ выполняется условие $|H_d(j\omega_{N/2})| = 0$, $\varphi(\omega_{N/2}) = 0$.

Качество аппроксимации в данном методе зависит от числа выборок частотной характеристики в переходной полосе L и их значений $H_{i\text{ onm}}$ ($i = 1, 2, \dots, L$), делающих аппроксимируемую функцию более гладкой. Различным значениям L соответствуют следующие примерные значения максимального уровня боковых лепестков:

$$\begin{aligned} L = 0: \delta_{2\text{max}} &\approx -20 \text{ дБ}; & L = 1: \delta_{2\text{max}} &\approx -40 \text{ дБ}; \\ L = 2: \delta_{2\text{max}} &\approx -50 - 60 \text{ дБ}; & L = 3: \delta_{2\text{max}} &\approx -80 - 100 \text{ дБ}. \end{aligned}$$

Реально методом частотной выборки можно синтезировать НФ с минимальным затуханием в полосе задерживания до (90–120) дБ.

Таким образом, оптимизация фильтра заключается в выборе L – числа выборок в переходной полосе и поиске их оптимальных значений $H_{i\text{ onm}}$, минимизирующих погрешности аппроксимации. Очевидно, что с увеличением числа варьируемых выборок существенно усложняется процедура оптимизации. Она достаточно эффективно реализуется на ЭВМ методом линейного программирования.

3.4.2. СИНТЕЗ НФ ВТОРОГО ТИПА МЕТОДОМ ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ

Путем дискретизации заданной частотной характеристики $H_d(j\omega)$ на дискретных частотах $\omega_k = (k + 0,5)\omega_d/N$ ($\lambda_k = 2\pi(k + 0,5)/N$), $k = 0 \dots N-1$ (рис. 3.12) могут быть синтезированы НФ второго типа.

Импульсная характеристика таких фильтров находится по аналогии с импульсной характеристикой НФ первого типа:

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(j\hat{\omega}_k) e^{j\hat{\omega}_k (n - \frac{N-1}{2}) T_d} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(j\hat{\omega}_k) e^{j \frac{2\delta}{N} (k + \frac{1}{2}) (n - \frac{N-1}{2})},$$

$n = 0, 1, \dots, N-1$.

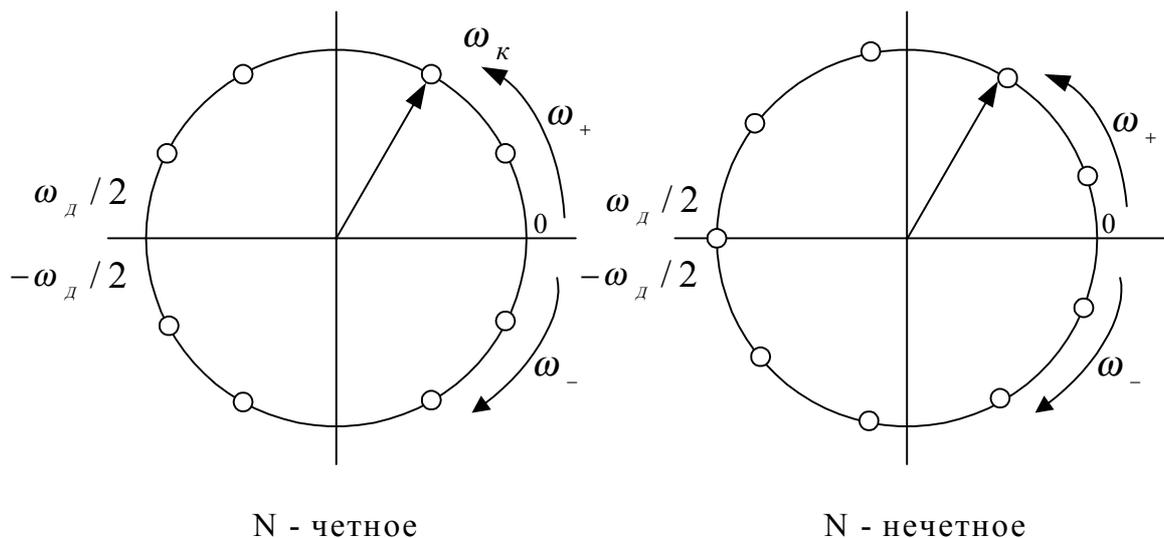


Рис. 3.12. Расположение точек дискретизации частотной характеристики на комплексной плоскости для НФ второго типа

Аналогично и общее выражение для частотной характеристики $H(j\omega)$, аппроксимирующей заданную. Отличие расчетных выражений для частотной характеристики фильтров второго типа от вышеприведенных связано с особенностями симметрии их АЧХ и ФЧХ (рис. 3.12) и заключается в следующем:

при нечетном N пределы суммирования по $k = 0, \dots, (N-3)/2$; частотная выборка $|H_d(0)|$ заменяется на $|H_d(j\omega_{(N-1)/2})|$, $\varphi(\omega_{(N-1)/2}) = 0$;

при четном N пределы суммирования по $k = 0, \dots, (N/2) - 1$; слагаемое вне суммы отсутствует.

Использование НФ второго типа позволяет в ряде случаев более удобным образом расположить частотные выборки относительно заданной аппроксимируемой частотной характеристики.

3.4.3. МЕТОДИКА СИНТЕЗА НФ МЕТОДОМ ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ

1. По значению заданного затухания в полосе задерживания a_3 выбирается число варьируемых отсчетов частотной характеристики в переходной полосе L . Например, при $a_3 \leq 40$ дБ, $L = 1$. Чем сложнее АЧХ фильтра, тем меньше затухание при данном значении L .

2. Для принятого значения L и заданной переходной полосы $\Delta f_{nep} = |f_3 - f_c|$ находим шаг дискретизации частотной характеристики по частоте: $\Delta f = \Delta f_{nep}/(L+1)$ и число точек дискретизации: $N = f_d/\Delta f = (L+1)f_d/\Delta f_{nep}$. Приравниваем N к ближайшему целому числу, обычно нечетному.

3. Дискретизируем заданную частотную характеристику $H_d(j\omega)$ с шагом Δf , в результате чего получаем ДЧХ $H_d(j\omega_k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Определяем номера k единичных, нулевых и варьируемых частотных выборок.

Задаемся начальными значениями $H_{i \text{ нач}}$ оптимизируемых частотных выборок в каждой переходной полосе, например, путем линейной интерполяции АЧХ между ее граничными частотами среза и задерживания.

4. Рассчитываем частотную характеристику $H(j\omega)$ и находим значения $H_{i \text{ опт}}$, при которых частотная характеристика удовлетворяет заданным требованиям. Например, для ФНЧ при $L = 1, N = 33$ значение $H_{1 \text{ опт}} = 0,3904, \delta_{2 \text{ max}} = -40$ дБ; при $L = 2, N = 65$ $H_1 = 0,588, H_2 = 0,1065, \delta_{2 \text{ max}} < -60$ дБ.

5. Рассчитываем импульсную характеристику НФ с учетом симметрии частотной характеристики:

$$h(n) = \frac{H_d(0)}{N} + \sum_{k=0}^{K_B} \frac{2|H_d(j\omega_k)|}{N} \cos[\omega_k(n - \frac{N-1}{2}T_d)],$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N-1, K_B = (N-1)/2$ при нечетном N и $K_B = (N/2) - 1$ – при четном.

Для НФ второго типа, как и при расчете частотной характеристики, изменяются пределы суммирования по k (см. выше) и первое слагаемое $H_d(0)/N$: при четном N оно отсутствует, а при нечетном заменяется на $H_d((N-1)/2)/N$.

6. Выбираем способ реализации НФ.

Ограничения метода частотной выборки связаны с обеспечением произвольных значений частот среза ЦФ.

3.4.4. ПРИМЕР СИНТЕЗА ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ НФ МЕТОДОМ ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ

Методом частотной выборки синтезирован НФ с заданными параметрами частотной характеристики, аналогичными РФ, синтезированному методом билинейного преобразования (см. п. 3.2.8). Синтез выполнен с помощью программы НФЧВ-СИНТЕЗ, разработанной студентами Захарченко М.О., Ставер В.В. под руководством автора. Ниже приводятся данные из протокола расчетов и графики, выводимые программой.

Тип фильтра - Полосовой

Первая частота среза фильтра	Fc1 = 8400 Гц
Вторая частота среза фильтра	Fc2 = 11600 Гц
Первая частота задерживания фильтра	Fz1 = 7600 Гц
Вторая частота задерживания фильтра	Fz2 = 12400 Гц
Затухание в полосе задерживания	Aз = 40 дБ
Неравномерность в полосе пропускания	Aп = 1 дБ
Частота дискретизации	Fd = 112000 Гц
Шаг дискретизации по частоте	dF = 400 Гц
Число частотных выборок	N = 280
Число частотных выборок в ПП фильтра	N1 = 9

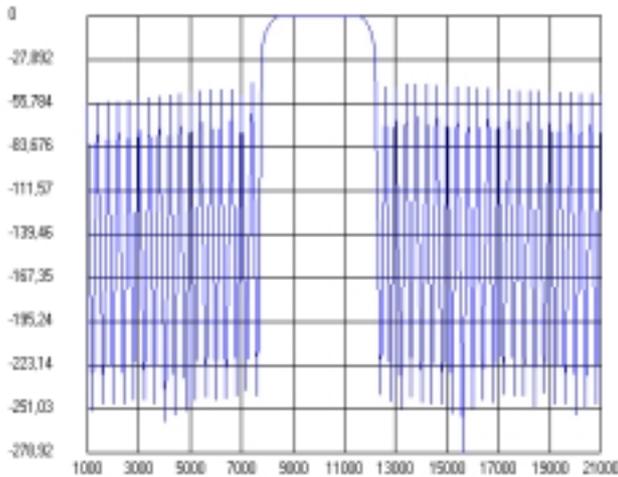
.....

Коэффициенты рекурсивных звеньев 2-го порядка

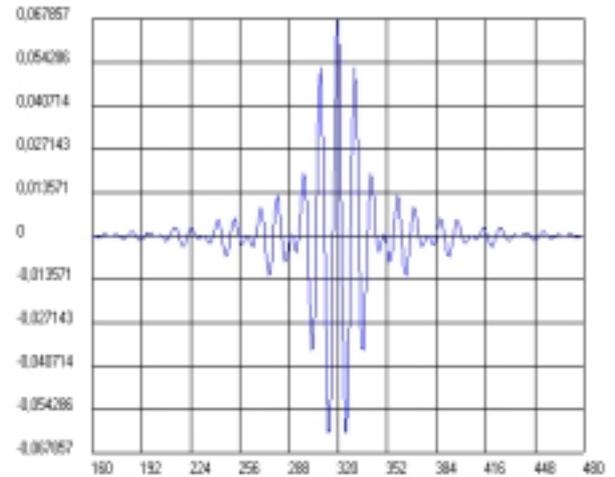
V0[20]=0,97493;	V1[20]=0,97493;	A1[20]=-1,78390;	A2[20]=0,98010
V0[21]=-0,97237;	V1[21]=-0,97237;	A1[21]=-1,76420;	A2[21]=0,98010
V0[22]=0,96969;	V1[22]=0,96969;	A1[22]=-1,74360;	A2[22]=0,98010
V0[23]=-0,96689;	V1[23]=-0,96689;	A1[23]=-1,72210;	A2[23]=0,98010

$B0[24]=0,96396;$ $B1[24]=0,96396;$ $A1[24]=-1,69970;$ $A2[24]=0,98010$
 $B0[25]=-0,96092;$ $B1[25]=-0,96092;$ $A1[25]=-1,67650;$ $A2[25]=0,98010$
 $B0[26]=0,95775;$ $B1[26]=0,95775;$ $A1[26]=-1,65250;$ $A2[26]=0,98010$
 $B0[27]=-0,95446;$ $B1[27]=-0,95446;$ $A1[27]=-1,62760;$ $A2[27]=0,98010$
 $B0[28]=0,95106;$ $B1[28]=0,95106;$ $A1[28]=-1,60190;$ $A2[28]=0,98010$
 $B0[29]=-0,94753;$ $B1[29]=-0,94753;$ $A1[29]=-1,57530;$ $A2[29]=0,98010$
 $B0[30]=0,94388;$ $B1[30]=0,94388;$ $A1[30]=-1,54800;$ $A2[30]=0,98010$

АЧХ НФ на основе ЧВ



Импульсная характеристика НФ



3.5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Численные или оптимальные методы синтеза ЦФ реализуются на ЭВМ с помощью процедур непосредственной аппроксимации заданных частотных характеристик фильтра в соответствии с определенными критериями минимизации ошибок аппроксимации. При этом частотные характеристики фильтра могут иметь произвольную форму. Основными при аппроксимации БИХ и КИХ-фильтров являются критерии минимума среднего квадрата ошибки (СКО) и наилучшего чебышевского равноволнового приближения (минимаксный критерий).

Целевая функция алгоритма минимизации СКО определяется выражением

$$E = \sum_{i=1}^M [|H(j\omega_i)| - |H_d(j\omega_i)|]^2,$$

где $H_d(j\omega_i)$, $H(j\omega_i)$ – заданная и аппроксимирующая частотные характеристики фильтра, вычисляемые на дискретном множестве частот ω_i . Эта функция нелинейна относительно коэффициентов фильтра.

Минимаксный критерий заключается в минимизации на множестве частот Ω максимальных значений взвешенного функционала ошибки:

$$E(\omega) = W(\omega) |H(j\omega) - H_d(j\omega)|,$$

где $W(\omega)$ – положительная весовая функция.

Поиск оптимальных значений коэффициентов фильтра при численной аппроксимации осуществляется методами наименьших квадратов, линейного программирования, нелинейной оптимизации (алгоритм Флетчера-Пауэлла для БИХ-фильтров) и многократной замены Ремеза (для фильтров с чебышевской аппроксимацией КИХ и БИХ-типа). Для них имеются эффективные компьютерные программы, например программа Макклемана синтеза оптимальных по критерию Чебышева КИХ-фильтров, универсальные программы синтеза ЦФ **FDAS2K**, **DFDP**, пакет **Signal** системы **MatLAB** и др.

Для численного синтеза КИХ и БИХ-фильтров используются также методы соответственно прямого и обратного адаптивного моделирования, имеющие программные реализации [49].

При синтезе ЦФ численными методами учитываются обязательные условия линейности ФЧХ КИХ-фильтров и обеспечения устойчивости БИХ-фильтров.

Синтезированные численными методами оптимальные ЦФ имеют наименьшую (среднеквадратическую или максимальную) погрешность аппроксимации при заданном порядке фильтра или наименьший порядок при заданной (допустимой) погрешности аппроксимации.

Для КИХ-фильтров нижних частот с оптимальной чебышевской аппроксимацией требуемую длину импульсной характеристики N можно определить по заданным допускам на погрешности аппроксимации с помощью эмпирической формулы, приводимой в [15].

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каковы задачи и методы синтеза ЦФ по заданной частотной характеристике?
2. Что понимается под преобразующей функцией в методе синтеза РФ по аналоговому прототипу?
3. Каковы свойства билинейных преобразующих функций?
4. Как отображаются точки из комплексной P -плоскости на комплексную Z -плоскость при билинейном преобразовании?
5. Какова взаимосвязь между частотами аналогового и цифрового фильтров при билинейном преобразовании?
6. В чем преимущества применения обобщенных преобразований при синтезе РФ заданного типа (ФВЧ, ППФ, ПЗФ)?
7. Как определяются требования к аналоговому фильтру-прототипу при синтезе РФ?
8. Каковы свойства и особенности аппроксимирующих функций, используемых при синтезе РФ по аналоговому прототипу?
9. От чего зависит порядок синтезируемого РФ в методе билинейного преобразования?
10. Как определяются нули и полюсы РФ по значению нулей и полюсов аналогового ФНЧ-прототипа?
11. Как конструируется требуемая импульсная характеристика синтезируемого НФ в методе весовых функций?
12. Как связана частотная характеристика синтезируемого НФ с частотной характеристикой весовой функции?
13. Каковы параметры и типичный вид частотных характеристик весовых функций, используемых при синтезе НФ?
14. Как связаны параметры частотной характеристики синтезируемого НФ с параметрами весовой функции?
15. Какие требования предъявляются к весовым функциям при синтезе НФ и почему?

16. В чем особенность и преимущество использования семейства весовых функций Кайзера для синтеза НФ?

17. Какую ФЧХ имеют НФ, синтезированные методами весовых функций и частотной выборки и почему?

18. Какую роль играют ДПФ и ОДПФ при синтезе НФ методом частотной выборки?

19. Как конструируется требуемая импульсная характеристика НФ в методе синтеза на основе частотной выборки?

20. Как обеспечивается требуемое качество аппроксимации при синтезе НФ методом частотной выборки?

21. Почему методы синтеза НФ на основе весовых функций и частотной выборки относятся к итерационным и каковы соответствующие им процедуры оптимизации?

22. Каковы возможные способы реализации НФ, синтезированных методами весовых функций и частотной выборки?

4. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ И ОБЕСПЕЧЕНИЯ ТОЧНОСТИ ЦОС

4.1. ЗАДАЧИ ЦОС, СВЯЗАННЫЕ С КОНЕЧНОЙ РАЗРЯДНОСТЬЮ ЧИСЕЛ

Реальные процессоры ЦОС работают с двоичными числами конечной разрядности, а следовательно, и точности. Конечные разрядности имеют цифровые сигналы, коэффициенты, их произведения и суммы произведений, определяемые, соответственно, разрядностями АЦП, регистров, умножителей и сумматоров процессора.

Уменьшение разрядности повышает быстродействие и упрощает обработку, однако при этом возрастает ее погрешность, ухудшаются характеристики системы, а в РФ возможна и потеря устойчивости.

В связи с этим при синтезе и реализации ЦФ возникают задачи оценки влияния и обоснованного выбора разрядности чисел.

Влияние конечной разрядности чисел связано с конкретными арифметическими операциями, реализуемыми в процессе обработки сигнала и зависит от **способа представления чисел**. В быстродействующих ЦФ используют **двоичные числа с фиксированной запятой**, над которыми выполняют операции **суммирования и умножения**. Результаты этих операций могут превышать по разрядности исходные данные, что приводит в общем случае к **переполнению разрядной сетки**. Характер переполнения может быть различен в зависимости от вида чисел. Наиболее удобны в случае ЦФ числа в виде **правильных дробей для отсчетов сигнала и смешанных дробей, содержащих целую часть – для коэффициентов**. При этом переполнения разрядной сетки **слева** возможны только в результате операции накопления сумм произведений, представляемых обычно в смешанном формате. **Переполнения вызывают грубые погрешности** и являются недопустимыми. Их можно предотвратить путем масштабирования сигналов в соответствующих точках фильтра.

В результате умножения отсчетов сигнала на коэффициенты фильтра возрастание разрядности происходит **справа** относительно разрядной сетки, т. е. в дробной части произведения. Это позволяет легко ограничить разрядность произведения или суммы произведений путем отбрасывания (с усечением или ограничением) необходимого числа младших разрядов. Очевидно, что ограничение разрядности произведений соответствует умножению с конечной точностью и приводит к погрешности обработки. Эту погрешность аналогично погрешности квантования АЦП называют шумом квантования или **собственным шумом ЦФ**. Ее случайный характер обусловлен априорной непредсказуемостью значений цифровых сигналов, циркулирующих в фильтре.

Погрешность квантования, вызываемую ограничением разрядности чисел, определяют разностью их квантованного и точного значений:

$e(n) = v_{кв}(n) - v(n)$. Полагается, что значения погрешности или отсчеты шума квантования $e(n)$ равновероятны в пределах $-2^{-q_\partial} \leq e(n) \leq 0$ при усечении и $-(2^{-q_\partial}/2) \leq e(n) \leq (2^{-q_\partial}/2)$ при округлении и характеризуются максимальным значением $|e|_{max} = E_m = \zeta 2^{-q_\partial}$, дисперсией $\sigma_e^2 = 2^{-2q_\partial}/12$ и средне-квадратичным значением (СКЗ) $\sigma_e = 2^{-q_\partial}/\sqrt{12}$, где $\eta = 1$ при усечении и $1/2$ при округлении; q_∂ – число сохраняемых разрядов **дробной части числа**; 2^{-q_∂} – вес единицы младшего разряда числа (ЕМР).

Для **цифрового сигнала АЦП** $q_\partial = q_x$ – определяется числом разрядов АЦП без учета знакового разряда.

Для **внутренних сигналов фильтра**, получаемых в результате умножения и накопления сумм произведений и приведения их к формату правильной дроби, q_∂ равно числу разрядов q_R сигнальных регистров фильтра (также без учета знакового разряда).

К основным задачам, связанным с конечной разрядностью чисел в ЦФ, относят:

- оценку погрешности обработки сигнала или шума квантования на выходе фильтра и необходимой разрядности АЦП и регистров фильтра;
- определение масштабных множителей, исключающих переполнение сумматоров в заданном диапазоне изменения входного сигнала;
- проверку условий устойчивости РФ при малых уровнях сигналов;
- определение допустимой разрядности коэффициентов фильтра q_k .

Решение поставленных задач предполагает также и сравнительную оценку степени чувствительности различных структур ЦФ к конечной разрядности чисел.

4.2. ВЛИЯНИЕ КВАНТОВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФИЛЬТРА

Коэффициенты ЦФ определяют на первом этапе синтеза – решении задачи аппроксимации [21, 22]. Их точные значения ограничивают с помощью округления некоторым конечным числом двоичных разрядов q_k . Это приводит к **изменению нулей и полюсов фильтра и отклонению его АЧХ и ФЧХ от заданной**.

Минимально необходимую разрядность коэффициентов находят многократным расчетом АЧХ и ФЧХ для квантованных значений коэффициентов, исходя из допустимой степени отклонения указанных характеристик.

Такой подход к оценке разрядности коэффициентов является наиболее простым, хотя и сопряженным с большим объемом вычислений на ЭВМ. Существуют и более сложные вероятностные аналитические методы оценки [15]. Разработаны также оптимальные процедуры квантования коэффициен-

тов, позволяющие по сравнению с обычным округлением уменьшить их разрядность при том же уровне искажений частотной характеристики [15].

При квантовании коэффициентов возможно **смещение полюсов РФ за пределы единичной окружности**, что ведет к **потере устойчивости**. Во избежание этого необходимо контролировать значения полюсов фильтра в процессе квантования коэффициентов.

4.3. МАСШТАБИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ

Масштабирование сигналов в ЦФ осуществляют путем введения **масштабных умножителей** на входе фильтра или его отдельных звеньев для исключения возможного переполнения сумматоров (рис. 4.1). **Масштабные множители (ММ)** m_i выбирают так, чтобы амплитуды сигналов на выходах сумматоров или звеньев $v_i(n)$ (рис. 4.2) при максимальном значении сигнала на входе фильтра $x(n)$, равном единице ($|x(n)|_{max}=1$), не превышали по модулю некоторого максимального значения, принимаемого также обычно за единицу ($|v_i(n)|_{max}=1$).

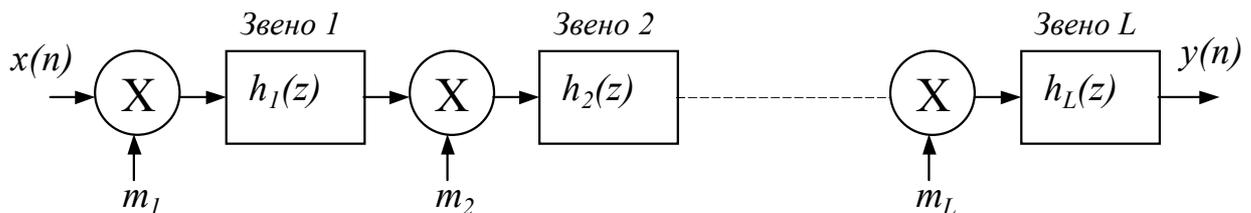


Рис. 4.1. Схема включения масштабных умножителей для каскадной формы реализации РФ

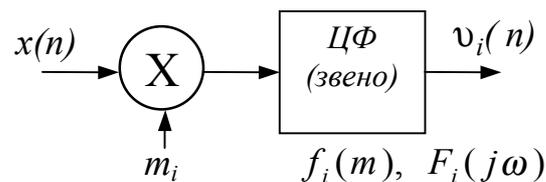


Рис. 4.2. Схема для расчета масштабных множителей

При этом числа на входах сумматоров по модулю могут быть больше единицы и превышать значения суммы [11, 12]. Однако при суммировании в дополнительном коде это не приводит к переполнениям, если сумма чисел по модулю меньше единицы. В то же время при реализации фильтра необходимо предусмотреть дополнительные разряды для целой части чисел на входах или выходах умножителей. Их количество находят в соответствии с максимальными значениями коэффициентов фильтра [11, 12].

Масштабирование уменьшает уровни сигналов фильтра и **ухудшает отношение сигнала к уровню шума квантования**, не зависящему от уровня сигнала. Поэтому при выборе ММ и способов их введения необходимо учитывать и условие сохранения максимально возможного соотношения сигнал-шум. Наиболее полно оно выполняется **включением масштабных умножителей между звеньями фильтра**.

Расчет ММ выполняют на основе линейной модели ЦФ без учета эффектов квантования сигналов. Возможны три метода расчета ММ: **временной, спектральный и статистический**.

В соответствии с **временным методом** сигнал в любой точке фильтра $v_i(n)$ (в том числе и на выходах сумматоров) определяется сверткой входного сигнала и импульсной характеристики фильтра $f_i(m)$ от входа до данной точки,

$$\text{т. е. } v_i(n) = m'_i \sum_{m=0}^{\infty} f_i(m) x(n-m).$$

Записывая предельное соотношение для $v_i(n)$:

$$|v_i(n)|_{max} \leq m'_i \sum_{m=0}^{\infty} |f_i(m)| |x(n-m)|_{max} \leq 1,$$

и подставляя в него максимальное значение входного сигнала $|x(n-m)| = 1$ (входной сигнал типа скачок) получаем расчетное значение временного ММ:

$$m'_i \leq 1 / \sum_{m=0}^{\infty} |f_i(m)|. \quad (4.1)$$

Данный метод расчета дает **предельную (нижнюю) оценку для ММ**, исключающую переполнения **при любых сигналах**. Однако отношение сигнала к шуму квантования при этом является минимальным.

Спектральный метод основан на соотношении

$$V_i(j\omega) = m''_i F_i(j\omega) X(j\omega),$$

определяющем спектр сигнала на выходе i -го сумматора через спектр входного сигнала $X(j\omega)$ и частотной характеристики от входа фильтра до выхода i -го сумматора $F_i(j\omega)$. Ему соответствует предельное соотношение

$$|V_i(j\omega)|_{max} \leq m''_i |F_i(j\omega)|_{max} |X(j\omega)|_{max} \leq 1,$$

из которого при $|X(j\omega)|_{max} = 1$, соответствующем входному гармоническому сигналу единичной амплитуды, находится оценка спектрального ММ:

$$m''_i \leq 1 / |F_i(j\omega)|_{max}. \quad (4.2)$$

Этот метод дает удовлетворительную оценку масштабных множителей для квазигармонических сигналов и определяет их верхнюю границу.

Статистический метод основан на соотношениях для дисперсии шума на выходе i -го сумматора при воздействии на входе фильтра сигнала $x(n)$ типа белый шум с максимальным среднеквадратичным значением $\sigma_{x\max} \leq 1/\gamma$, где $\gamma = (3-4)$:

$$\sigma_{v_i}^2 = \sigma_x^2 \frac{(m_i''')^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_i(j\omega)|^2 d(\omega T_d) = (m_i''')^2 \sigma_x^2 \sum_{m=0}^{\infty} f_i^2(m).$$

Ему отвечает предельное соотношение

$$\sigma_{v_i\max} \leq m_i''' \sigma_{x\max} \left[\sum_{m=0}^{\infty} f_i^2(m) \right]^{1/2} \leq 1/\gamma,$$

из которого получается статистическая оценка ММ:

$$m_i''' \leq 1 / \left(\sum_{m=0}^{\infty} f_i^2(m) \right)^{1/2}. \quad (4.3)$$

Этот метод дает удовлетворительную оценку ММ для широкополосных и случайных сигналов с равномерным энергетическим спектром. Она занимает промежуточное значение относительно оценок m' , m'' .

Таким образом, для расчета масштабных множителей любым из методов необходимо вычислить импульсные и частотные характеристики $f_i(m)$ и $F_i(j\omega)$ от входа фильтра до выхода i -го сумматора и воспользоваться соотношениями (4.1), (4.2), (4.3).

Ввиду трудоемкости вычислений расчет ММ выполняют с помощью ЭВМ [11, 23].

4.4. РАСЧЕТ МАСШТАБНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ ДЛЯ КОНКРЕТНЫХ СТРУКТУР ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

4.4.1. ЗВЕНО РЕКУРСИВНОГО ФИЛЬТРА 2-ГО ПОРЯДКА, ПРЯМАЯ ФОРМА РЕАЛИЗАЦИИ

Прямой форме реализации звена 2-го порядка РФ соответствует структурная схема (рис. 4.3), на которой показаны также эквивалентные источники шума квантования умножителей $e_i(n)$, не учитываемые при оценке ММ. Множитель $m_{\text{вых}} = 1/m$ на выходе звена может быть введен для компенсации ослабления, вносимого входным масштабным умножителем, предотвращающим переполнение сумматора Σ .

Импульсная и частотная характеристики от входа фильтра до выхода сумматора $f(n)$, $F(j\lambda)$, $i = 1$ совпадают в данном случае с соответствующими характеристиками всего фильтра: $f(n) = h(n)$; $F(j\lambda) = H(j\lambda)$.

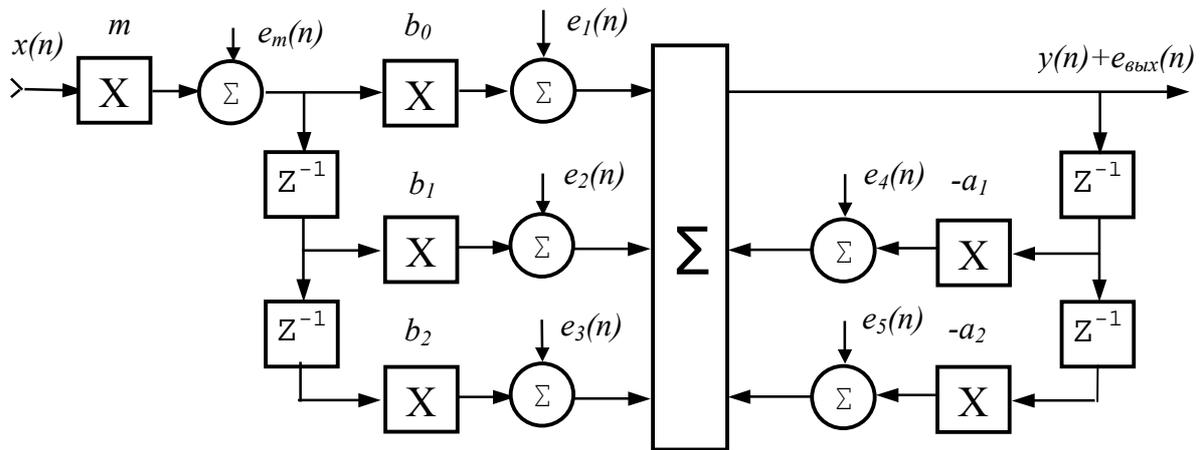


Рис. 4.3. Звено РФ с элементами масштабирования и эквивалентными источниками шума квантования (прямая форма реализации)

4.4.2. ЗВЕНО РЕКУРСИВНОГО ФИЛЬТРА 2-ГО ПОРЯДКА, КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА РЕАЛИЗАЦИИ

В данной структуре (рис. 4.4) необходимо исключить переполнение в обоих сумматорах ($i = 1, 2$). Характеристики $f_2(n)$, $F_2(j\lambda)$ для второго сумматора определяются общими импульсной и частотной характеристиками фильтра $f_2(n) = h(n)$; $F_2(j\lambda) = H(j\lambda) = B(j\lambda)/A(j\lambda)$, по которым находится ММ m_2 , а для первого сумматора – соответствующими характеристиками рекурсивной части фильтра: $f_1(n) = h_p(n)$, $F_1(j\lambda) = H_p(j\lambda) = 1/A(j\lambda)$, по которым находится ММ m_1 . Из двух значений в качестве ММ звена выбирается меньший $m = \min\{m_1, m_2\}$. Возможно также отдельное масштабирование рекурсивной и нерекурсивной части звена.

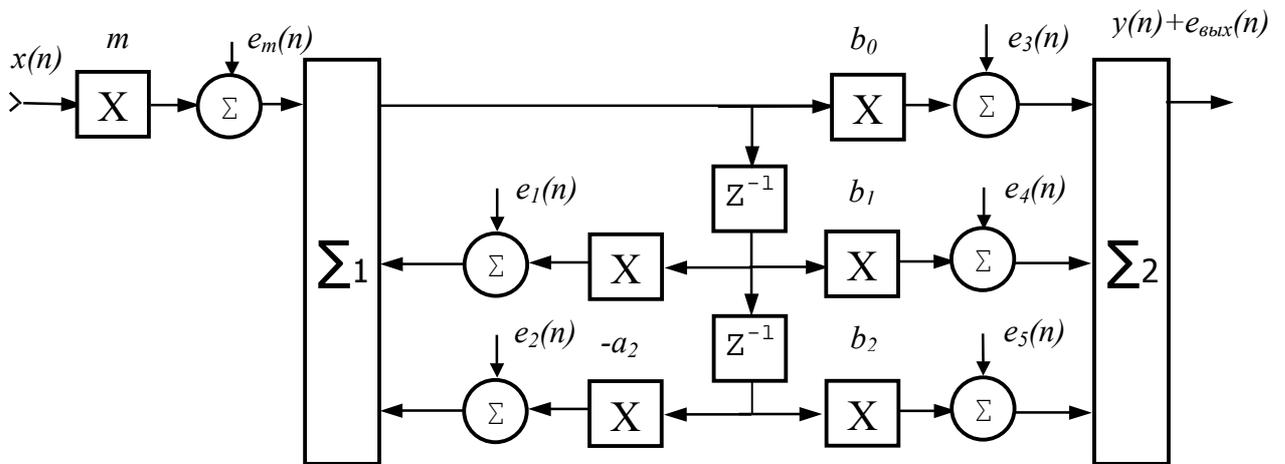


Рис. 4.4. Звено РФ с элементами масштабирования и эквивалентными источниками шума квантования (каноническая форма реализации)

Звенья РФ могут быть предварительно промасштабированы также умножением на ММ коэффициентов их нерекурсивной части.

4.4.3. ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ СТРУКТУРА РЕКУРСИВНОГО ФИЛЬТРА

В параллельной структуре (рис. 4.5) ММ находят для отдельных звеньев фильтра в зависимости от формы реализации звеньев, из которых выбирается меньший, включаемый на входе всего фильтра.

4.4.4. КАСКАДНАЯ СТРУКТУРА РЕКУРСИВНОГО ФИЛЬТРА

В каскадной структуре (см. рис. 4.1) ММ включаются между звеньями фильтра. Полагаем, что звенья имеют **прямую форму реализации** и число сумматоров равно числу звеньев: $i = 1, 2, \dots, L$.

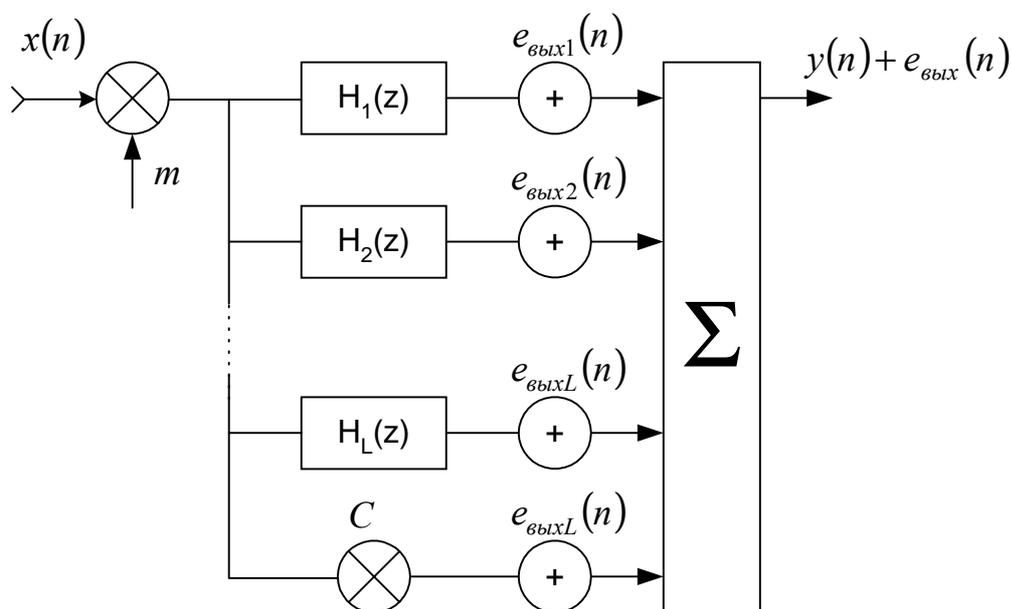


Рис. 4.5. Параллельная форма реализации РФ с элементами масштабирования и эквивалентными источниками шума квантования

Частотную и импульсную характеристики от входа до выхода сумматора i -го звена определяют здесь с учетом всех предыдущих звеньев и их масштабных множителей.

Для сумматора (звена) 1 имеем:

$f_1(m) = h_1(m)$; $F_1(j\omega) = H_1(j\omega)$, по ним находится ММ m_1 на входе 1-го звена;

Для сумматора (звена) 2:

$f_2(m) = m_1 h_1(m) * h_2(m)$, где $*$ – символ свертки импульсных характеристик 1-го и 2-го звеньев;

$F_2(j\omega) = m_1 H_1(j\omega) H_2(j\omega)$; по ним находится ММ m_2 на входе 2-го звена и т. д.

Для сумматора (звена) L:

$$f_L(m) = m_1 \cdot m_2 \dots m_{L-1} h_1(m) * h_2(m) \dots h_L(m),$$

$F_L(j\omega) = m_1 \cdot m_2 \dots m_L H_1(j\omega) H_2(j\omega) \dots H_L(j\omega)$; по ним находится ММ m_L на входе L-го звена

При канонической форме реализации звеньев выражения $F_{i2}(j\lambda)$, $f_{i2}(n)$ для второго сумматора совпадают с вышеприведенными для прямой формы реализации, а для первого сумматора имеют вид

$$F_{i1}(j\lambda) = \prod_{l=1}^i m_{l-1} H_{l-1}(j\lambda) H_{ip}(j\lambda); \quad f_{i1}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_{i1}(j\lambda) e^{j\lambda n} d\lambda.$$

Обычно ММ принимают равными ближайшему значению $\hat{m} = 2^{-q_m} m$, где $q_m = \text{int} \log_2 m$, символ *int* означает целую часть числа плюс единица. При этом умножение выполняют простым сдвигом числа влево или вправо на q_m разрядов.

4.4.5. ПРЯМАЯ ФОРМА РЕАЛИЗАЦИИ НЕРЕКУРСИВНОГО ФИЛЬТРА

Для данного типа фильтра, структура которого приведена на рис. 4.6,

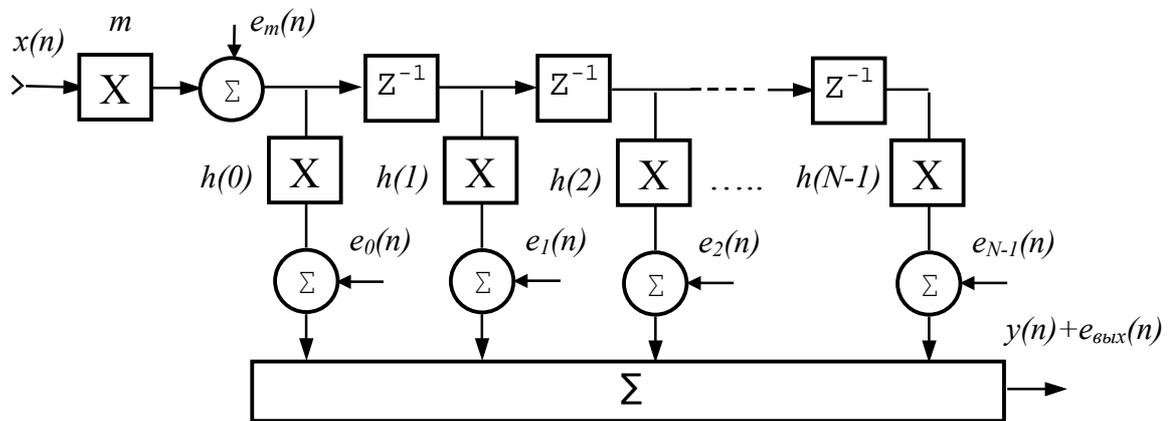


Рис. 4.6. Нерекурсивный фильтр с элементами масштабирования и эквивалентными источниками шума квантования

ММ включается на входе фильтра, при этом импульсная и частотная характеристики $f(n)$, $F(j\lambda)$ совпадают с импульсной и частотной характеристиками фильтра $h(n)$, $H(j\lambda)$. Масштабирование возможно также путем предварительного умножения на ММ отсчетов импульсной характеристики фильтра.

4.5. ОЦЕНКА ШУМОВ КВАНТОВАНИЯ И ТРЕБУЕМОЙ РАЗРЯДНОСТИ АЦП И РЕГИСТРОВ ФИЛЬТРА

4.5.1. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ШУМОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ФИЛЬТРОВ

Погрешность обработки сигналов в ЦФ характеризуется шумом квантования на выходе фильтра, обусловленном шумами квантования входного сигнала и результатов умножения отсчетов сигнала на коэффициенты фильтра. Оценка шума находится по **шумовой эквивалентной схеме фильтра**, содержащей эквивалентные источники шума квантования, включаемые в точках структурной схемы фильтра, где происходит квантование чисел. В соответствии с шумовыми эквивалентными схемами источника входного цифрового сигнала (АЦП) (рис. 4.7, а) и умножителя (рис. 4.7, б) шумы эквивалентных источников $e_x(n) = x_{кв}(n) - x(n)$ и $e_R(n) = Cv(n) - [Cv(n)]_{кв}$ суммируются с неквантованными, т. е. точными значениями входного сигнала $x(n)$ и произведения $Cv(n)$. Шумы эквивалентных источников, представляемых на схемах фиктивными сумматорами, характеризуются предельным и среднеквадратичным значениями и дисперсией, зависящими от числа сохраняемых при квантовании разрядов дробной части q входного сигнала и произведения:

$$\max|e(n)| = \eta 2^{-q}; \quad \sigma_e = 2^{-q}/(12)^{1/2}; \quad \sigma_e^2 = 2^{-2q} / 12.$$

Значения q определяются соответственно разрядностями АЦП q_x и умножителей (регистров) фильтра q_R без учета их знаковых разрядов (для умножителей при определенных условиях и без учета разрядов целой части произведения, если таковые имеются); $\eta = 1$ при квантовании с усечением и $1/2$ – при округлении.

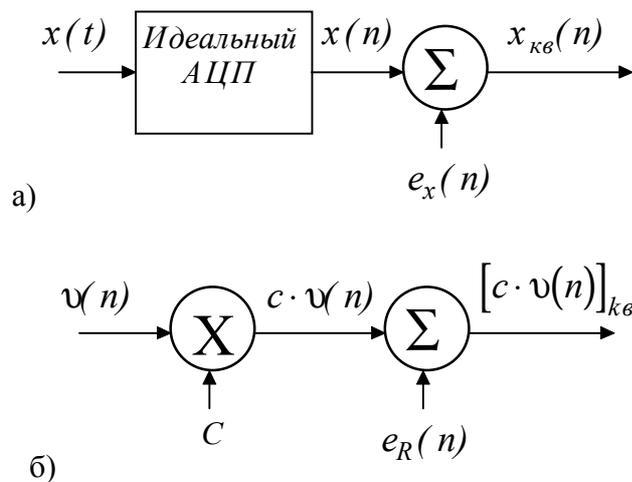


Рис. 4.7. Шумовые эквивалентные схемы АЦП (а) и умножителя (б)

Возможны два метода оценки точности ЦФ: детерминированный и вероятностный.

Детерминированный метод дает **предельную оценку шума квантования на выходе фильтра**, гарантирующую правильный выбор разрядности чисел для произвольных сигналов. В соответствии с ним шум на выходе фильтра от i -го источника шума $e_i(n)$ можно найти для линейной системы путем свертки мгновенного значения шума $e_i(n)$ с импульсной характеристикой $g_i(n)$, определяемой от точки приложения шума до выхода фильтра:

$$e_{\text{вых}i}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} g_i(m) e_i(n-m).$$

Перейдя к предельному соотношению $|e_{\text{вых}i}(n)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |g_i(m)| |e_i(n-m)|$,

при максимальном значении шума i -го источника $|e_i(n-m)| = |e_i(n)|_{\text{max}} = \eta 2^{-q_i}$ получим максимальное значение вызываемого им шума квантования на выходе фильтра:

$$|e_{\text{вых}i}(n)|_{\text{max}} = E_{mi} \leq \eta 2^{q_i} \sum_{n=0}^{\infty} |g_i(n)|. \quad (4.8)$$

Суммарное предельное значение шума квантования на выходе линейной системы находится суммированием шумов (4.8) от всех источников:

$$E_{\text{твых}} = \sum_i |e_{\text{вых}i}(n)|_{\text{max}}.$$

Метод, основанный на **вероятностных характеристиках шума квантования**, позволяет оценить дисперсию или среднеквадратичное значение шума квантования на выходе фильтра известными методами теории случайных сигналов. При этом полагается, что отсчеты шума квантования независимы (шум является белым) и их источники не коррелированы между собой и входным сигналом. С учетом этих условий дисперсия шума на выходе фильтра от i -го источника шума для линейной дискретной системы определяется выражением [15]

$$\sigma_{\text{вых}i}^2 = \sigma_i^2 \sum_{n=0}^{\infty} g_i^2(n) = \sigma_i^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |G_i(j\lambda)|^2 d\lambda = \sigma_i^2 L_i,$$

где $\sigma_i^2 = 2^{-2q_i} / 12$ – дисперсия шума i -го источника; $G_i(j\lambda)$ – частотная характеристика от точки приложения i -го источника шума до выхода фильтра.

Дисперсия или мощность шума на выходе фильтра от действия всех источников равна сумме дисперсий шумов отдельных источников:

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \sum_i \sigma_{\text{вых}i}^2 = P_{\text{швых}}. \quad (4.9)$$

Корень из (4.9) определяет среднеквадратичное значение выходного шума.

Выполнимость условий, накладываемых на вероятностный метод, и следовательно, достоверность получаемых с его помощью оценок зависят от уровня и характера обрабатываемых сигналов. В частности, условиям о некоррелированности отсчетов шума между собой и входным сигналом плохо удовлетворяют такие сигналы, как единичный, прямоугольный импульс или синусоидальное колебание. Наиболее они обоснованы для сложных быстроизменяющихся сигналов, таких как речевой, музыкальный и др., а также при большом уровне внешних шумов, когда от выборки к выборке мгновенное значение сигнала изменяется на несколько уровней квантования. Поэтому надежность оценок, получаемых вероятностным методом, в общем случае ниже, чем детерминированным. Их можно рассматривать в качестве **нижней границы** оценок шумов квантования и требуемых разрядностей АЦП и регистров фильтра. **Одновременное использование обоих методов позволяет определить границы возможных значений параметров ЦФ**, которые уточняются затем путем моделирования на ЭВМ или макетирования.

Оценка шумов квантования детерминированным и вероятностным методами для конкретных структур ЦФ сводится к построению их шумовой эквивалентной схемы и определению импульсных и частотных характеристик от каждого i -го источника шума квантования до выхода фильтра.

4.5.2. РАСЧЕТ ШУМА КВАНТОВАНИЯ АЦП НА ВЫХОДЕ ЦФ

В соответствии с расчетной шумовой эквивалентной схемой (рис. 4.8)

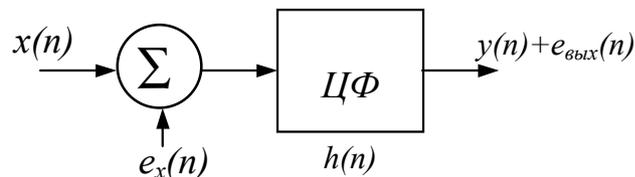


Рис. 4.8. Схема для расчета шумов квантования АЦП на выходе ЦФ

поступающий на вход фильтра квантованный сигнал АЦП представляется суммой его неквантованных (точных) значений и шума квантования АЦП: $x_{кв}(n) = x(n) + e_x(n)$. Сигнал на выходе фильтра без учета квантования чисел в самом фильтре также в соответствии с принципом суперпозиции может быть определен в виде суммы его точного значения и шума квантования, обусловленного АЦП: $y_{кв}(n) = y(n) + e_{вых}(n)$.

Необходимые для оценки выходного шума импульсная и частотная характеристики от точки приложения шума до выхода фильтра в данном случае совпадают с результирующими импульсной и частотной характеристиками фильтра: $g_i(n) = h(n)$; $G_i(j\lambda) = H(j\lambda)$. В соответствии с (4.8), (4.9') это

дает следующие оценки предельного значения и дисперсии шума на выходе ЦФ:

$$E_{m \text{ вых}} = \eta 2^{-q_x} \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)|; \quad \sigma^2_{e \text{ вых}} = \frac{2^{-2q_x}}{12} \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) = P_{e \text{ вых}}. \quad (4.10)$$

Задаваясь допустимыми значениями максимума шума квантования или его среднеквадратичного значения, можно из (4.10) получить **верхнюю и нижнюю оценки требуемой разрядности АЦП:**

$$q'_{aцп} = \text{int} \log_2 \frac{\eta \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)|}{E_{m \text{ вых доп}}}; \quad q''_{aцп} = \text{int} \log_2 \frac{\sqrt{\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m)}}{\sqrt{12} \sigma_{e \text{ вых доп}}}, \quad (4.10')$$

где символ *int* означает целую часть числа плюс единица.

Значение $q_{aцп}$ выбирается из условия $q''_{aцп} \leq q_{aцп} \leq q'_{aцп}$ в зависимости от вида сигнала.

При выборе разрядности АЦП необходимо иметь в виду также условия, рассмотренные в параграфе 1.4.

4.5.3. РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ШУМОВ КВАНТОВАНИЯ ДЛЯ ПРЯМОЙ ФОРМЫ РЕАЛИЗАЦИИ ЗВЕНА РФ 2-го ПОРЯДКА

Собственные шумы ЦФ обусловлены ограничением разрядности произведений отсчетов сигнала на коэффициенты фильтра (взвешенных отсчетов сигнала). Необходимые для их оценки шумовые эквивалентные схемы ЦФ получаются заменой реальных множителей их шумовыми эквивалентами в соответствии с рис. 4.7, б.

При прямой форме реализации звена РФ все источники шума квантования множителей в соответствии с шумовой эквивалентной схемой рис. 4.3 включены ко входам сумматора и могут быть заменены одним эквивалент-

ным источником шума $e_{экв}(n) = \sum_{i=1}^p e_{Ri}(n)$, где p – число множителей с не-

тривиальными коэффициентами умножения b_i, a_i , отличными от 0 или ± 1 . В общем случае $p = 5$. На схеме отражен также шум квантования масштабного множителя $e_m(n) = e_R(n)$, включенного во входе фильтра. Этот шум имеет место только при условии $q_{aцп} + q_m > q_R$. Необходимые для оценки шума на выходе фильтра импульсная и частотная характеристики относительно точек приложения источников шума совпадают для масштабного множителя с общими импульсной и частотной характеристиками фильтра $g_1(n) = h(n)$, $G_1(j\lambda) = H(j\lambda)$, а для эквивалентного источника шума множителей $e_{экв}(n)$ – с характеристиками его рекурсивной части $g_2(n) = h_p(n)$, $G_2(j\lambda) = H_p(j\lambda)$. Пре-

дельная оценка и дисперсия шума квантования на выходе звена при этом в соответствии с (4.8), (4.9) будут равны:

$$E_{m_{вых}} = \eta 2^{-q_R} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| + p \sum_{m=0}^{\infty} |h_p(m)| \right);$$

$$\sigma^2_{e_{вых}} = \frac{2^{-2q_R}}{12} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |h(m)|^2 + p \sum_{m=0}^{\infty} |h_p(m)|^2 \right). \quad (4.11)$$

Из (4.11), задаваясь допустимыми значениями шума на выходе фильтра, по аналогии с (4.10') можно найти необходимую **разрядность произведений q_R , определяющую разрядность сигнальных регистров фильтра.**

Если масштабный множитель на входе фильтра не создает шумов квантования, то первые слагаемые в скобках (4.11) равны нулю.

4.5.4. РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ШУМОВ КВАНТОВАНИЯ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ РЕАЛИЗАЦИИ ЗВЕНА РФ 2-го ПОРЯДКА

В случае канонической реализации звена РФ шумовая эквивалентная схема (рис. 4.4) включает два эквивалентных источника шума:

$$e_{экв1}(n) = \sum_{i=1}^{p_1} e_{Ri}(n) \text{ и } e_{экв2}(n) = \sum_{i=1}^{p_2} e_{Ri}(n),$$

где p_1, p_2 соответствуют числу множителей с нетривиальными коэффициентами умножения a_i, b_i , которые подключены ко входам первого (p_1) и второго (p_2) сумматоров. Импульсная и частотная характеристики фильтра для первого источника шума определяются характеристиками всего фильтра, т. е. $g_1(n) = h(n)$, $G_1(j\lambda) = H(j\lambda)$, а для второго источника, шум которого непосредственно проходит на выход фильтра, $G_2(i\lambda) = 1$, $g_2(n) = 1$ при $n = 0$ и $g_2(n) = 0$ при $n > 0$. Тогда оценки шумов квантования на выходе фильтра можно записать в виде

$$E_{m_{вых}} = \eta 2^{-q_R} \left[p_1 \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| + p_2 \right];$$

$$\sigma^2_{e_{вых}} = \frac{2^{-2q_R}}{12} \left[p_1 \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) + p_2 \right] \quad (4.12)$$

Из (4.12) находят оценку требуемой **разрядности регистров фильтра.**

4.5.7. РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ШУМОВ КВАНТОВАНИЯ ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ФОРМЫ РЕАЛИЗАЦИИ РФ

При параллельной форме реализации РФ выходной шум фильтра (рис. 4.5) складывается из выходных шумов параллельно включенных звеньев и одного умножителя:

$$e_{\text{вых}}(n) = \sum_{J=1}^L e_{\text{вых}i}(n) + e_R(n).$$

Соответственно складываются и их предельные значения и дисперсии:

$$E_{m_{\text{вых}}} = \sum_{J=1}^L E_{m_{\text{вых}i}} + \eta 2^{-q_R}; \quad \sigma^2_{e_{\text{вых}}} = \left[\sum_{J=1}^L \sigma^2_{e_{\text{вых}i}} + 2^{-2q_R} / 12 \right]. \quad (4.13)$$

Значения $E_{m_{\text{вых}i}}$ и $\sigma^2_{e_{\text{вых}i}}$ находят для каждого звена фильтра по выражениям (4.11), (4.12) в соответствии с его формой реализации. По допустимым значениям шума на выходе фильтра из (4.13) определяют необходимую **разрядность регистров фильтра**.

4.5.5. РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ШУМОВ КВАНТОВАНИЯ ДЛЯ КАСКАДНОЙ ФОРМЫ РЕАЛИЗАЦИИ РФ

Расчет шума квантования для каскадной структуры РФ выполняется с помощью обобщенной шумовой эквивалентной схемы рис. 4.9.

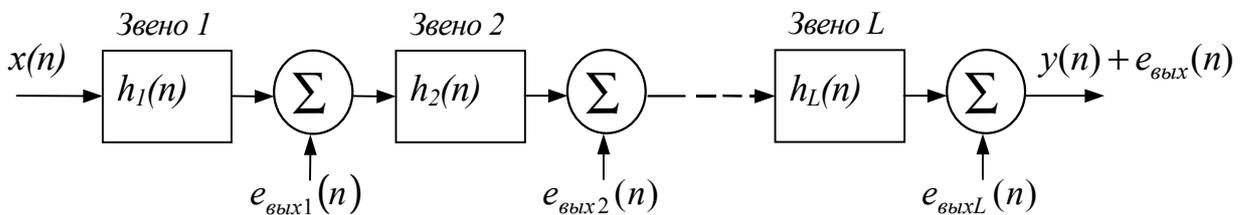


Рис. 4.9. Обобщенная шумовая эквивалентная схема РФ для каскадной формы реализации

На этой схеме, как и в случае параллельной реализации, звенья фильтра полагаются идеальными (нешумящими), а их выходные шумы представляются L эквивалентными источниками шума $e_{\text{вых}i}(n)$. Шум каждого из них проходит на выход через все последующие звенья фильтра.

Частотные характеристики от i -го источника до выхода фильтра определяются здесь произведением частотных характеристик следующих за ним звеньев, а импульсные характеристики – сверткой соответствующих импульсных характеристик:

$$G_i(j\omega) = H_{i+1}(j\omega)H_{i+2}(j\omega) \cdots H_L(j\omega) \quad (4.14)$$

$$g_i(m) = h_{i+1}(m) * h_{i+2}(m) * \dots * h_L(m),$$

где $i = 1, 2, \dots, L - 1$. Для шума последнего звена, который непосредственно проходит на выход фильтра, $G_L(j\omega) = 1$, $g_L(m) = u_0(m) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$.

При этом собственные шумы звеньев, так же как и их частотные и импульсные характеристики, определяются с учетом масштабных множителей, включаемых на входах звеньев.

Зная частотные и импульсные характеристики (4.14), можно найти предельное значение и дисперсию шума на выходе каскадно реализуемого РФ:

$$E_{m_{вых}} = \sum_{i=1}^{L-1} \left[E_{m_{выхi}} \sum_{m=0}^{\infty} |g_i(m)| \right] + E_{m_{выхL}}, \quad (4.15)$$

$$\sigma^2_{e_{вых}} = \sum_{i=1}^{L-1} \left[\sigma^2_{e_{выхi}} \sum_{m=0}^{\infty} g_i^2(m) \right] + \sigma^2_{e_{выхL}}.$$

Решая обратную задачу, по допустимым значениям $E_{m_{вых.доп}}$, $P_{швых.доп}$ находят разрядности q'_R , q''_R и $q_{умн}$.

В каскадной структуре ШК на выходе фильтра зависит от порядка включения звеньев и способа попарного объединения нулей и полюсов отдельных звеньев [12]. Наилучшим является сочетание нулей и полюсов, минимизирующее максимум модуля частотной характеристики звена: $\max_{\delta \leq \omega \leq \delta} |H_J(j\lambda)|$.

Обычно это условие выполняется при объединении в пары полюсов с ближайшими к ним нулями на комплексной Z -плоскости.

Порядок же включения звеньев определяют чаще всего перебором возможных вариантов по минимуму шума квантования на выходе фильтра.

Следует отметить, что каскадная (как и параллельная) структуры обладают наилучшими шумовыми свойствами по сравнению с прямой или канонической формами реализации РФ высокого порядка.

4.5.6. РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ШУМОВ КВАНТОВАНИЯ ДЛЯ НЕРЕКУРСИВНОГО ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА НА ОСНОВЕ ДВС

На структурной схеме НФ (рис. 4.6) шумы квантования всех умножителей приложены ко входам сумматоров и могут быть заменены одним эквивалентным источником шума $e_{экв}(n) = \sum e_{Ri}(n)$. Этот шум проходит непосредственно на выход фильтра, что соответствует импульсной и частотной характеристикам $G(j\lambda) = 1$ и $g_1(n) = 1$ при $n=0$ и $g_1(n) = 0$ при $n > 0$. Для шума квантования входного масштабного множителя импульсная и частотная характеристики совпадают с соответствующими характеристиками всего фильтра: $q_2(n) = h(n)$; $G_2(i\lambda) = H(j\lambda)$.

С учетом этого оценки выходного шума НФ определяются выражениями:

$$E_{m \text{ вых}} = \eta 2^{-q_R} \left(\sum_{n=0}^{N-1} |h(n)| + N \right); \sigma^2_{e \text{ вых}} = \frac{2^{-2q_R}}{12} \left(\sum_{n=0}^{N-1} h^2(n) + N \right) \quad (4.16)$$

При отсутствии шумов масштабного множителя ($q_{\text{ацп}} + q_m < q_R$) выражения (4.16) принимают вид

$$E_{m \text{ вых}} = \eta 2^{-q_R} N; \quad \sigma^2_{e \text{ вых}} = (2^{-2q_R} / 12) N.$$

Следует отметить, что в НФ в отличие от РФ ограничение разрядности произведений в процессе обработки сигнала не является принципиально необходимым, если разрядность регистров умножителей больше или равна разрядности произведений, определяемой суммой разрядностей входного сигнала и коэффициентов фильтра. При этом обеспечивается отсутствие собственных шумов квантования и соответственно высокая точность таких фильтров.

4.6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ ИЛИ КОЛЕБАНИЯ В РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРАХ

В РФ за счет конечной разрядности чисел возможны при определенных условиях такие специфические явления, как колебания переполнения большой амплитуды и колебания или предельные циклы малой амплитуды. Они нарушают устойчивую работу фильтра. Колебания переполнения можно предотвратить правильным масштабированием или ограничением сигналов.

Колебания малой амплитуды связаны с ограничением разрядности произведений в рекурсивной части фильтра и являются следствием нелинейного характера этой операции. Они возникают, когда сигнал на входе фильтра становится равным нулю или постоянному (медленно меняющемуся) значению. При этом нарушается некоррелированность ошибок квантования между собой и со входным сигналом. Особенно нежелательны периодические колебания на выходе фильтра, когда входной сигнал принимает нулевые значения, например, при пропадании сигнала в системах связи, в паузах речевых и музыкальных сигналов и др. Это явление называют также эффектом мертвой зоны в РФ.

Во всех случаях уменьшение амплитуды собственных колебаний достигается путем увеличения разрядности произведений, т. е. разрядности регистров арифметического устройства.

4.7. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНЕЧНОЙ РАЗРЯДНОСТИ ЧИСЕЛ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ

Задачи, связанные с конечной разрядностью чисел (КРЧ), решаются на втором после задач аппроксимации этапе синтеза ЦФ. На этом этапе известны коэффициенты фильтра, форма его реализации, передаточные функции, частотные характеристики и математические модели (или алгоритмы обработки) всего фильтра и его отдельных звеньев. В процессе решения задач КРЧ находятся разрядности коэффициентов фильтра, масштабные множители, разрядности АЦП и регистров арифметического устройства фильтра, уточняется структура фильтра, проверяется возможность существования предельных циклов низкого уровня в РФ.

Минимально необходимая разрядность коэффициентов фильтра определяется обычно при решении задач аппроксимации путем выбора более жестких (по сравнению с заданными) допусков на отклонения АЧХ. Повышая точность аппроксимации АЧХ, можно уменьшить разрядность коэффициентов фильтра.

Исходными данными при решении других задач КРЧ являются:

тип входного сигнала;

динамический диапазон входного сигнала, задаваемый минимальными и максимальными значениями его амплитуды или мощности: x_{cminvx} , $x_{ctmaxvx}$ или $D_{cm} = 20\lg(x_{ctmaxvx}/x_{cminvx})$ или $D_{cp} = 10\lg(P_{ctmaxvx}/P_{cminvx})$;

допустимое отношение минимального значения амплитуды или мощности выходного сигнала к уровню или мощности шума квантования на выходе фильтра:

$$R_{дон\ m} = 20\lg(x_{cmin\ вых}/E_{m\ вых\ дон}), R_{дон\ p} = 10\lg(P_{cmin\ вых}/P_{e\ вых\ дон}); \quad (4.17)$$

коэффициент передачи фильтра в полосе пропускания K_0 .

Максимальная амплитуда сигнала на входе фильтра $x_{ctmaxvx}$, влияющая на структуру разрядной сетки арифметического устройства фильтра (соотношение числа разрядов целой и дробной частей) и значения масштабных множителей, для удобства вычислений нормируется обычно к единице. По максимальному значению с учетом типа входного сигнала и осуществляется расчет масштабных множителей фильтра, предотвращающих переполнения разрядной сетки в процессе обработки сигнала.

Минимальная амплитуда сигнала x_{cminvx} может быть задана непосредственно или найдена из заданного диапазона амплитуд сигналов на входе фильтра D_c : $x_{cminvx} = x_{ctmaxvx} 10^{-D_c/20}$. В случае синусоидального сигнала ей соответствует минимальное значение мощности входного сигнала

$$P_{cminvx} = x_{cminvx}^2 / 2.$$

Минимальные значения амплитуды и мощности сигнала на выходе фильтра находятся через заданный коэффициент его передачи в полосе пропускания: $x_{c\min\text{вых}} = K_o x_{c\min\text{вх}}$; $P_{c\min\text{вых}} = K_o^2 x_{c\min\text{вх}}^2 / 2$.

По этим значениям и заданным отношениям сигнала к шуму квантования (4.19) определяются допустимое предельное значение и допустимая мощность шума квантования на выходе фильтра:

$$E_{\text{твых доп}} = x_{c\min\text{вых}} 10^{-R_{\text{доп т}} / 20} = x_{c\min\text{вх}} K_o 10^{-R_{\text{доп т}} / 20},$$

$$P_{\text{евых доп}} = \frac{x_{c\min\text{вх}}^2 K_o^2}{2} 10^{-R_{\text{доп п}} / 10}.$$

Допустимые значения шума квантования распределяются между АЦП и умножителями фильтра:

$$E_{\text{твых доп}} = E_{\text{твых доп ацп}} + E_{\text{твых доп умн}}; \quad P_{\text{евых доп}} = P_{\text{евых доп ацп}} + P_{\text{евых доп умн}}.$$

При этом большая часть их отводится на шумы квантования АЦП, поскольку возможности увеличения разрядности АЦП более ограничены, чем умножителей. Принимая $E_{\text{твых доп ацп}} = \xi E_{\text{твых доп}}$ и $P_{\text{евых доп ацп}} = \xi^2 P_{\text{евых доп}}$, находим допустимые шумы квантования умножителей: $E_{\text{твых доп умн}} = (1 - \xi) E_{\text{твых доп}}$, $P_{\text{евых доп умн}} = (1 - \xi^2) P_{\text{евых доп}}$, где $\xi = (0,8 - 0,9)$.

Расчет разрядности АЦП $q_{\text{ацп}}$ и числа разрядов дробной части произведений q_R производят детерминированным и вероятностным способами в соответствии с вышеприведенными выражениями для конкретной структуры фильтра. Используемый при этом метод расчета (детерминированный или вероятностный) определяется способом задания выходного шума квантования – его мощностью или максимальным значением.

Возможен также расчет двух оценок разрядности и выбор той из них, которая наиболее соответствует характеру обрабатываемых сигналов.

Общая разрядность арифметического устройства фильтра $q_{\text{ау}} = q_{\text{ау(ц)}} + q_R$ включает разряды дробной части произведений и целой, число которых определяется значением наибольшего по модулю коэффициента фильтра, превышающего по модулю единицу.

Для каскадного РФ изменением порядка включения звеньев и сочетания их нулей и полюсов оптимизируется структура фильтра по минимуму разрядности арифметического устройства.

Далее выполняется моделирование ЦФ на ЭВМ с учетом КРЧ.

4.8. РОЛЬ ЭВМ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОЦЕНКИ И ОБЕСПЕЧЕНИЯ ТОЧНОСТИ ЦФ

Рассмотренные расчетные соотношения для оценки и обеспечения точности ЦФ практически не представляются в замкнутой форме и требуют большого объема вычислений, основанных на моделировании ЦФ на ЭВМ. Для РФ это связано к тому же с бесконечной длиной их импульсных характеристик, по которым выполняются все расчеты. Необходимость моделирования обусловлена также статистическим по своей сути характером задач КРЧ. Моделирование ЦФ позволяет проверить правильность выбора расчетных оценок ММ и разрядностей чисел для различного класса сигналов, оценить фильтрующие свойства при наличии внешних шумов и помех, определить динамические характеристики фильтров, исследовать устойчивость РФ при малых уровнях сигналов.

4.9. СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОЦЕНКИ И ОБЕСПЕЧЕНИЯ ТОЧНОСТИ ЦФ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ЭВМ

Одной из первых задач, решаемых с помощью программной модели ЦФ, является определение импульсной характеристики фильтра и вычисление сумм ее модулей и квадратов. Они находятся по отклику фильтра на сигнал типа единичный импульс. При этом для РФ устанавливается также условная длительность импульсной характеристики и соответствующее ей время протекания переходных процессов в фильтре.

Правильность выбора ММ проверяется путем определения максимальных значений моделируемых сигналов соответствующего класса в различных точках фильтра (как правило, на выходах звеньев и всего фильтра).

Переходные процессы в ЦФ оцениваются по их откликам на импульсные сигналы, имеющие конечную длительность или следующие с низкой частотой повторения.

Предельные циклы низкого уровня в РФ исследуются подачей на вход сигналов конечной длительности и наблюдением реакции фильтра после окончания входного сигнала, когда он принимает нулевые значения.

Фильтрующие свойства ЦФ оцениваются путем вычисления и сопоставления спектров его выходного и тестового входного сигналов в установленном режиме.

Наибольшие сложности связаны с моделированием конечной разрядности чисел и нахождением статистических оценок шумов квантования на выходе ЦФ.

Измерение шума квантования и внешних шумов или помех на выходе ЦФ в режиме моделирования может быть выполнено в соответствии с общей двухканальной структурной схемой рис. 4.10. Каждый канал ее со-

держит независимо управляемые программные модели АЦП, осуществляющие квантование входного сигнала и цифрового фильтра с ограничением и без ограничения разрядности чисел (точного ЦФ и ЦФ с квантованием чисел). К сигналу, поступающему на второй канал этой схемы, с помощью сумматора может быть добавлен внешний шум или помеха. Отсчеты шума квантования каналов, как и отфильтрованного шума или помехи, получаются путем вычитания выходных сигналов каналов.

Собственные шумы квантования ЦФ получаются на выходе сумматора схемы рис. 4.10 при отключении квантования входных сигналов и подключении в одном канале точного, а в другом “грубого” (с квантованием произведений) ЦФ.

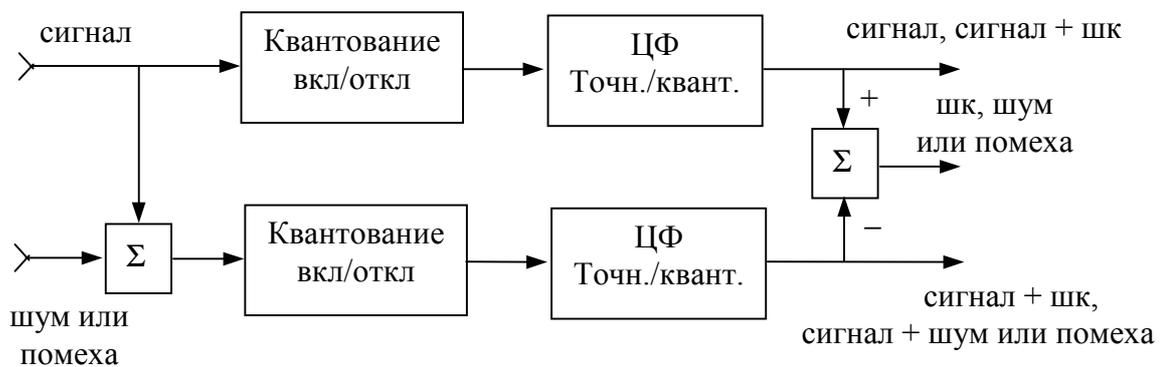


Рис. 4.10. Схема измерения шумов квантования и внешних шумов и помех на выходе ЦФ

Шум квантования АЦП на выходе ЦФ можно измерить путем включения квантования сигнала в одном канале при отключенном квантовании чисел в ЦФ обоих каналов.

Включив в верхнем канале ЦФ с квантованием чисел, можно оценить суммарные шумы квантования АЦП и произведений на выходе ЦФ этого канала.

Оценку наложенного на сигнал внешнего шума или помехи на выходе нижнего канала схемы можно найти, подключив их источник ко входу сумматора этого канала. При этом квантование сигнала в данном канале может быть включено или отключено, как и тип ЦФ, – с квантованием или без квантования чисел.

По измеренным отсчетам шума квантования или внешних шумов и помех на выходе ЦФ путем статистической обработки на ЭВМ находятся их предельные и среднеквадратические оценки и исследуются спектральные, авто- и взаимокорреляционные характеристики и законы распределения, а также фильтрующие свойства ЦФ по отношению к ним.

4.10. ОБЩАЯ ГРАФ-СХЕМА ПРОГРАММНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЦФ

Программная модель ЦФ получается путем замены математических переменных, с помощью которых описываются реализуемые фильтром алгоритмы, на программные переменные или идентификаторы, через которые и представляются алгоритмы моделирования ЦФ. В модели без квантования чисел обработка сигналов выполняется с точностью вычислений используемой ЭВМ и системы программирования. В модели, учитывающей конечную точность обработки сигналов (модели с квантованием), нужно также моделировать операцию квантования (ограничения разрядности) чисел в процессе обработки.

Операция квантования чисел $Q[x]$ моделируется следующим образом:

$$Q[x] = \left[x 2^{q_d} \right]_ц / 2^{q_d} = x_{кв},$$

где q_d – количество сохраняемых двоичных разрядов дробной части числа $x_{кв}$ (входного сигнала, внутренних сигналов, произведений и соответственно АЦП, регистров умножителей и арифметического устройства фильтра); $[\dots]_ц$ – операция взятия целой части числа (с усечением или округлением).

Моделирование осуществляется, как правило, на языке высокого уровня, хотя модели ЦФ с конечной разрядностью чисел могут быть реализованы и на языке ассемблера. При этом программа моделирования мало отличается от реализационной программы ЦФ, работающего с реальными устройствами ввода-вывода и выполняющего обработку сигнала в реальном времени. Программирование фильтра потребует в этом случае дополнительно обеспечения синхронизации операций ввода-вывода и программной обработки сигнала, выполняемых в течение каждого периода дискретизации.

В соответствии с общей граф-схемой алгоритма моделирования ЦФ (рис. 4.11) моделирующая программа включает: описание (объявление) массивов переменных, т. е. сигнальной памяти фильтра и его коэффициентов; ввод – клавиатурный или из файла – значений порядка фильтра (или числа звеньев) и коэффициентов фильтра, разрядностей входного сигнала, произведений и коэффициентов, способа ограничения разрядности (усечение или округление), а также числа обрабатываемых за один кадр отсчетов входного сигнала K . После обнуления сигнальной памяти и установки счетчиков отсчетов входного сигнала (l и k) вызывается процедура подготовки и ввода очередного отсчета входного сигнала. Возможно как программное вычисление (моделирование) тестового сигнала, так и считывание его из файла или с клавиатуры. Введенный отсчет сигнала квантуется (исходя из задания) и обрабатывается в соответствии с заданным алгоритмом. Полученный в результате отсчет выходного сигнала Y выводится на экран или в файл, или записывается в массив для вывода графика сигнала или дальнейшей (вторичной) обработки. Затем модифицируется номер отсчета сигнала и процесс модели-

рования повторяется до завершения текущего кадра сигнала, а при необходимости и последующих кадров. Вернувшись в меню, можно изменить исходные данные и повторить обработку.

Граф-схемы алгоритмов моделирования конкретных ЦФ различаются программной моделью реализуемого ими алгоритма обработки, т. е. блоком обработки 9 рис. 4.11.

4.11. ГРАФ-СХЕМА АЛГОРИТМА МОДЕЛИРОВАНИЯ КАСКАДНО РЕАЛИЗУЕМОГО РФ ДЛЯ ПРЯМОЙ ФОРМЫ РЕАЛИЗАЦИИ ЗВЕНЬЕВ

Обработка сигнала в таком фильтре осуществляется в соответствии с разностными уравнениями звеньев 2-го порядка:

$$y_J(n) = b_{0J}x_J(n) + b_{1J}x_J(n-1) + b_{2J}x_J(n-2) - a_{1J}y_J(n-1) - a_{2J}y_J(n-2),$$

где $J = 1 \dots L$ – номер звена, L – число звеньев.

Для программного моделирования фильтра введем следующие программные переменные: $y(n) \rightarrow Y$; $x(n) \rightarrow X$; $x_J(n-1) \rightarrow X_1(J)$; $x_J(n-2) \rightarrow X_2(J)$; $y_J(n-1) \rightarrow Y_1(J)$; $y_J(n-2) \rightarrow Y_2(J)$; $m_J \rightarrow M(J)$. Им соответствует алгоритм “точной” обработки или базовая операция

$$Y = M(J) * X * B_0(J) + B_1(J) * X_1(J) + B_2(J) * X_2(J) - A_1(J) * Y_1(J) - A_2(J) * Y_2(J),$$

где * – символ операции умножения.

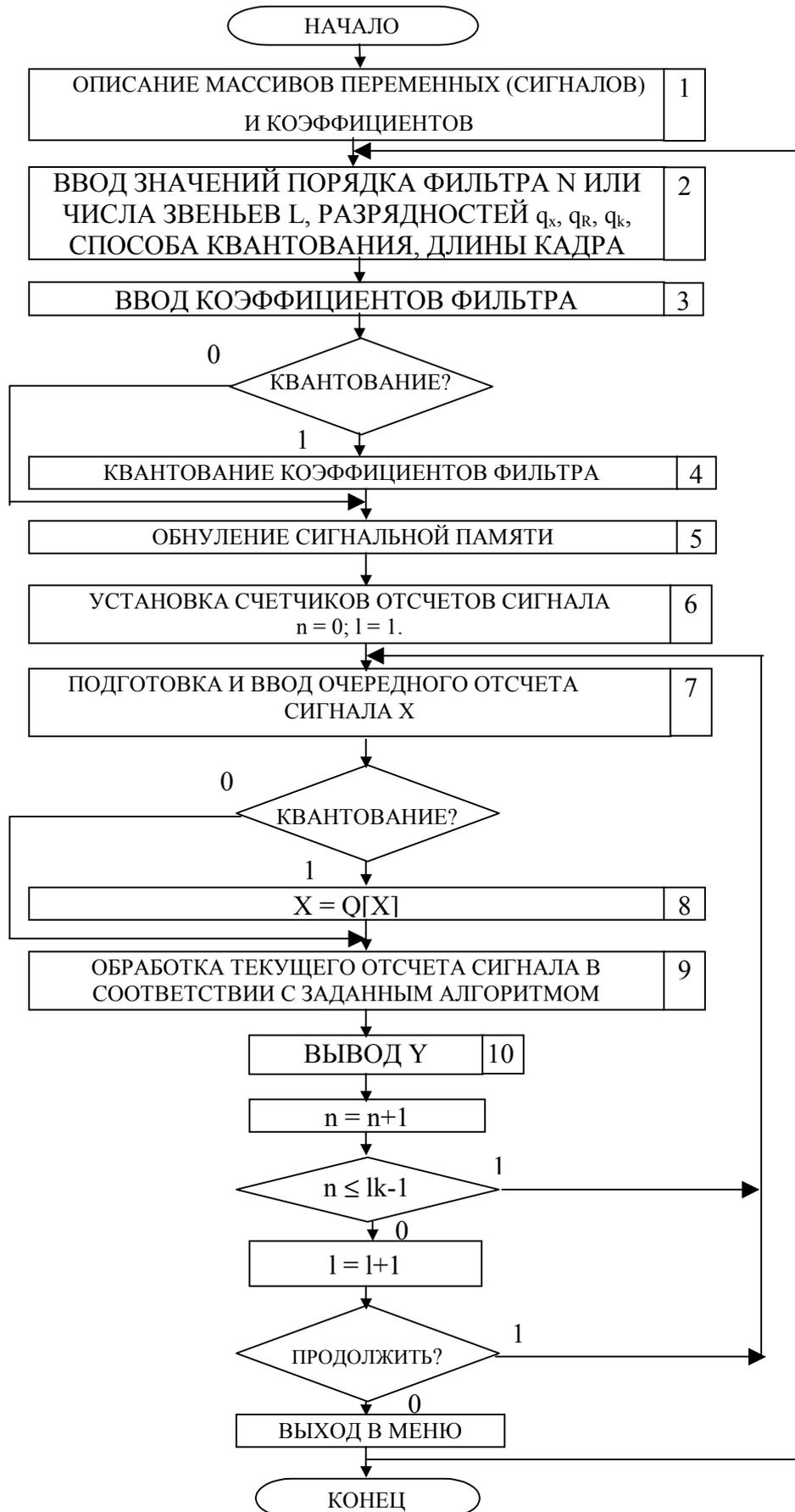


Рис. 4.11. Общая граф-схема алгоритма моделирования цифровых фильтров

Для подготовки звена к обработке следующего отсчета сигнала нужно выполнить также операции сдвига сигнальной памяти и передачи сигнала на вход следующего звена:

$$X_2(J) = X_1(J); X_1(J) = M(J) * X; Y_2(J) = Y_1(J); Y_1(J) = Y; X = Y.$$

В модели с квантованием произведений алгоритм обработки фильтра преобразуется следующим образом:

$$Y = Q[Q[M(J) * X] * B_0(J)] + Q[B_1(J) * X_1(J)] + Q[B_2(J) * X_2(J)] - Q[A_1(J) * Y_1(J)] - Q[A_2(J) * Y_2(J)].$$

Он предполагает ограничение разрядности после каждой операции умножения. Возможен и другой вариант обработки с квантованием накопленной суммы произведений:

$$Y = Q[Q[M(J) * X] * B_0(J) + B_1(J) * X_1(J) + B_2(J) * X_2(J) - A_1(J) * Y_1(J) - A_2(J) * Y_2(J)].$$

Такой способ ограничения обеспечивает более высокую точность обработки.

Приведенная на рис. 4.12 граф-схема алгоритма моделирования цифровой обработки для рассматриваемого РФ соответствует первому способу ограничения разрядности чисел в процессе обработки.

4.12. ГРАФ-СХЕМА АЛГОРИТМА МОДЕЛИРОВАНИЯ КАСКАДНО РЕАЛИЗУЕМОГО РФ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ РЕАЛИЗАЦИИ ЗВЕНЬЕВ

Звенья фильтра в этом случае описываются разностными уравнениями:

$$\begin{aligned} w_J(n) &= x_J(n) - a_{1J}w_J(n-1) - a_{2J}w_J(n-2), \\ y_J(n) &= b_{0J}x_J(n) + b_{1J}x_J(n-1) + b_{2J}x_J(n-2). \end{aligned}$$

Им соответствует “точный” алгоритм обработки в терминах вводимых по аналогии с параграфом 4.13. программных переменных:

$$\begin{aligned} W &= M(J) * X - A_1(J) * W_1(J) - A_2(J) * W_2(J); \\ Y &= B_0(J) * W + B_1(J) * W_1(J) + B_2(J) * W_2(J). \end{aligned}$$

Для моделей обработки с квантованием могут быть использованы следующие алгоритмы:

$$\begin{aligned} W &= Q[M(J) * X] - Q[A_1(J) * W_1(J)] - Q[A_2(J) * W_2(J)], \\ Y &= Q[B_0(J) * W] + Q[B_1(J) * W_1(J)] + Q[B_2(J) * W_2(J)] - \end{aligned}$$

с ограничением разрядности после каждой операции умножения и

$$\begin{aligned} W &= Q[M(J) * X - A_1(J) * W_1(J) - A_2(J) * W_2(J)], \\ Y &= Q[B_0(J) * W + B_1(J) * W_1(J) + B_2(J) * W_2(J)] - \end{aligned}$$

с ограничением разрядности накопленной суммы произведений.

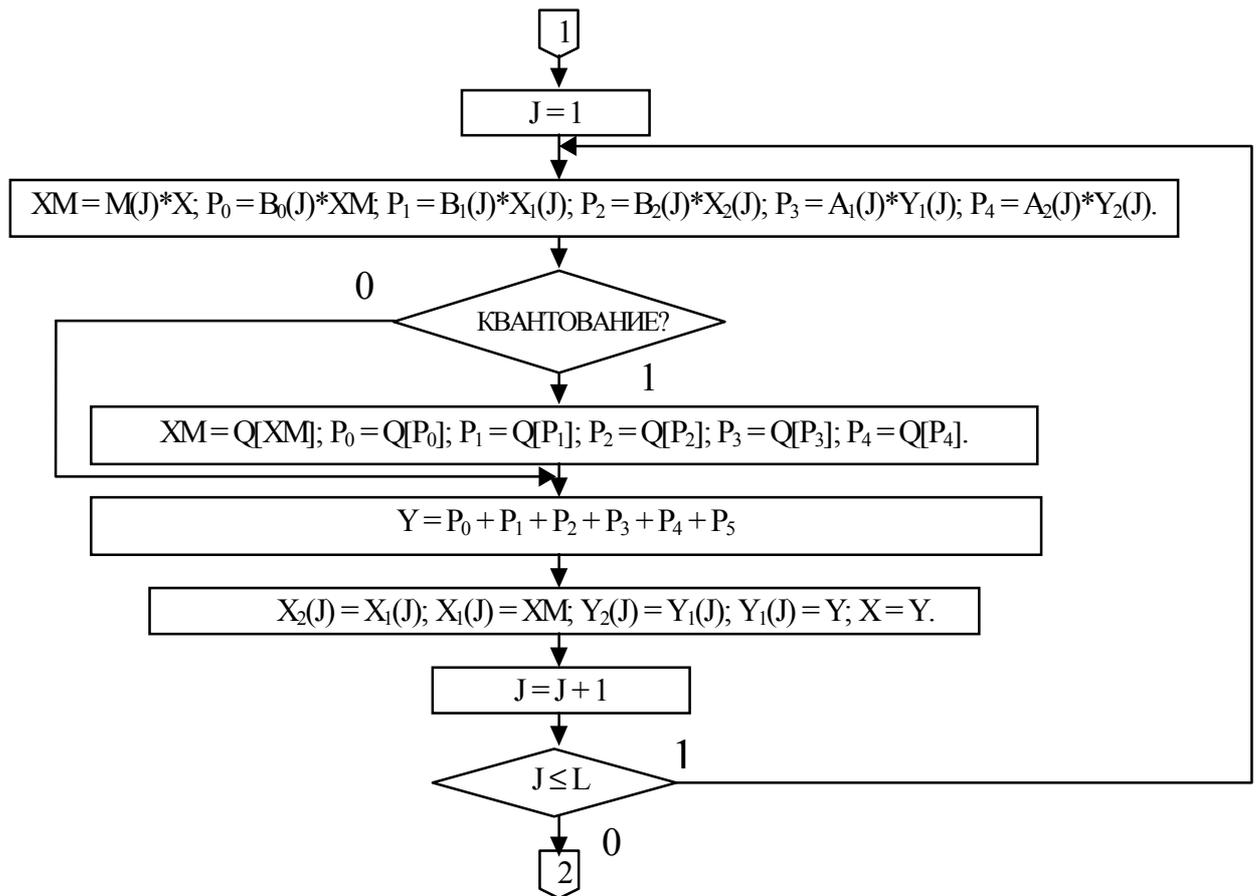


Рис. 4.12. Граф-схема алгоритма моделирования каскадно реализуемого РФ для прямой формы реализации звеньев

Для всех моделей выполняются также операции сдвига сигнальной памяти и передачи сигнала на вход следующего звена: $W_2(J) = W_1(J)$; $W_1(J) = W$; $X = Y$.

Граф-схема алгоритма моделирования рис. 4.13 соответствует второму варианту ограничения разрядности чисел в процессе обработки.

Аналогичным образом можно построить граф-схему алгоритма моделирования РФ для параллельной формы его реализации.

4.13. ГРАФ-СХЕМА АЛГОРИТМА МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕРЕКУРСИВНОГО ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА НА ОСНОВЕ ДВС

Нерекурсивный фильтр математически описывается дискретной временной сверткой: $y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$. Заменой переменных соответствующими идентификаторами математический алгоритм приводится к “точному” программному алгоритму обработки, моделирующему заданный:

$$Y = Y + H(U)X(U); \quad X(U) = X(U-1); \quad U = N-1, \dots, 0.$$

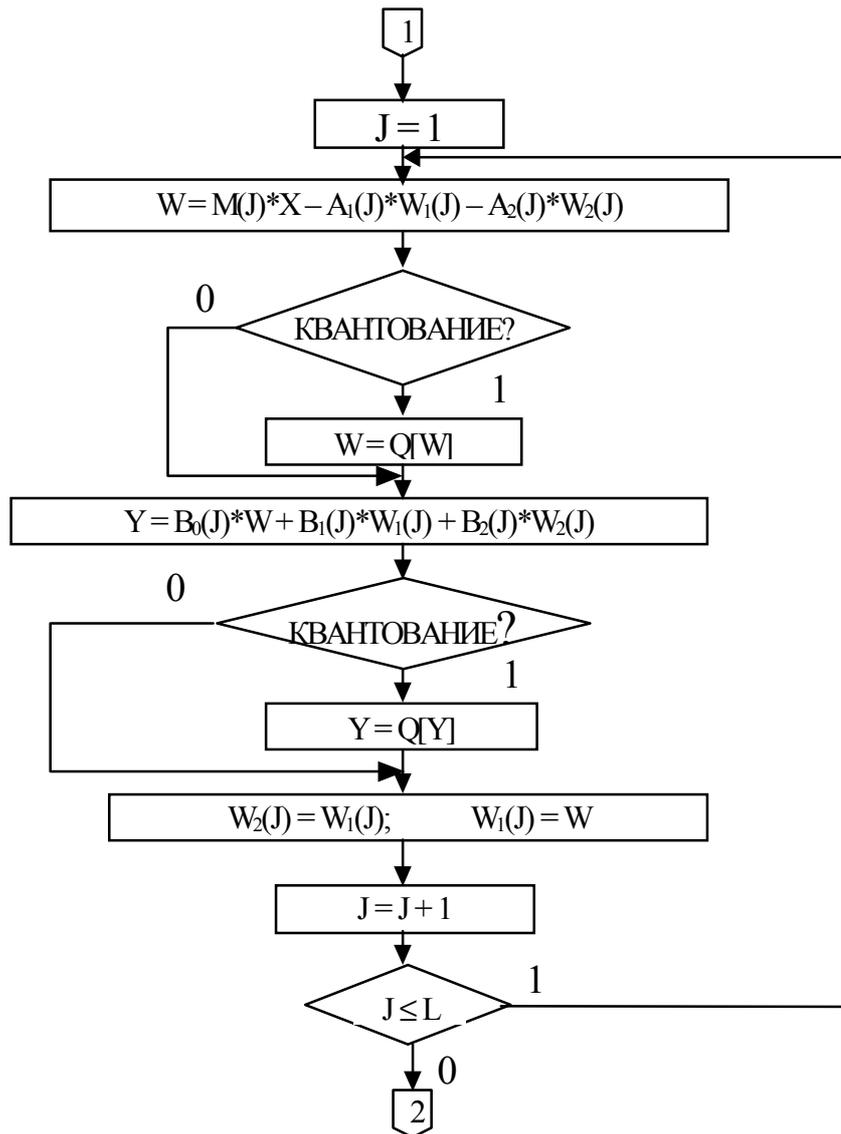


Рис. 4.13. Граф-схема алгоритма моделирования каскадно реализуемого РФ для канонической формы реализации звеньев

Он известен как алгоритм обработки со сдвигом сигнальной памяти фильтра. Существует и алгоритм, не требующий сдвига сигнальной памяти, организуемой в виде кольцевого программного буфера.

Алгоритм моделирования НФ реализует базовую операцию ЦОС – накопление сумм произведений, вызываемую N раз в процессе обработки каждого отсчета сигнала. Перед обработкой очередного отсчета начальное значение суммы обнуляется: $Y = 0$. На последнем цикле, соответствующем значению индексной переменной $U = 0$, сдвиг сигнальной памяти не производится.

Для модели с квантованием алгоритм обработки принимает вид:

$$Y = Y + Q[H(U)X(U)].$$

Импульсная характеристика НФ может быть предварительно (до обработки) промасштабирована путем умножения на заданный масштабный множитель.

Рассмотренному алгоритму моделирования НФ соответствует граф-схема рис. 4.14, а. Граф-схема алгоритма без сдвига сигнальной памяти приведена на рис. 4.14, б.

В базовой операции $Y = Y + H(U)X(I)$ алгоритма без сдвига сигнальной памяти индексная переменная I определяет номер элемента очереди отсчетов сигнала $X(I)$. Она находится как $I = [I_0 + U]_{\text{mod}N}$, где I_0 – начало очереди:

$X(I_0) = x(n)$; $[..]_{\text{mod}N}$ – операция вычисления I по модулю N : $I = I_0 + U$, если $I_0 + U < N$ и $I = I_0 + U - N$ при $I_0 + U > N$.

Начальное значение $I = I_0$ должно быть задано до начала ввода отсчетов входного сигнала, например, в блоке 5 ГСА рис. 4.11 и может быть произвольным в пределах $0, \dots, N - 1$. Наиболее удобно его принять равным нулю.

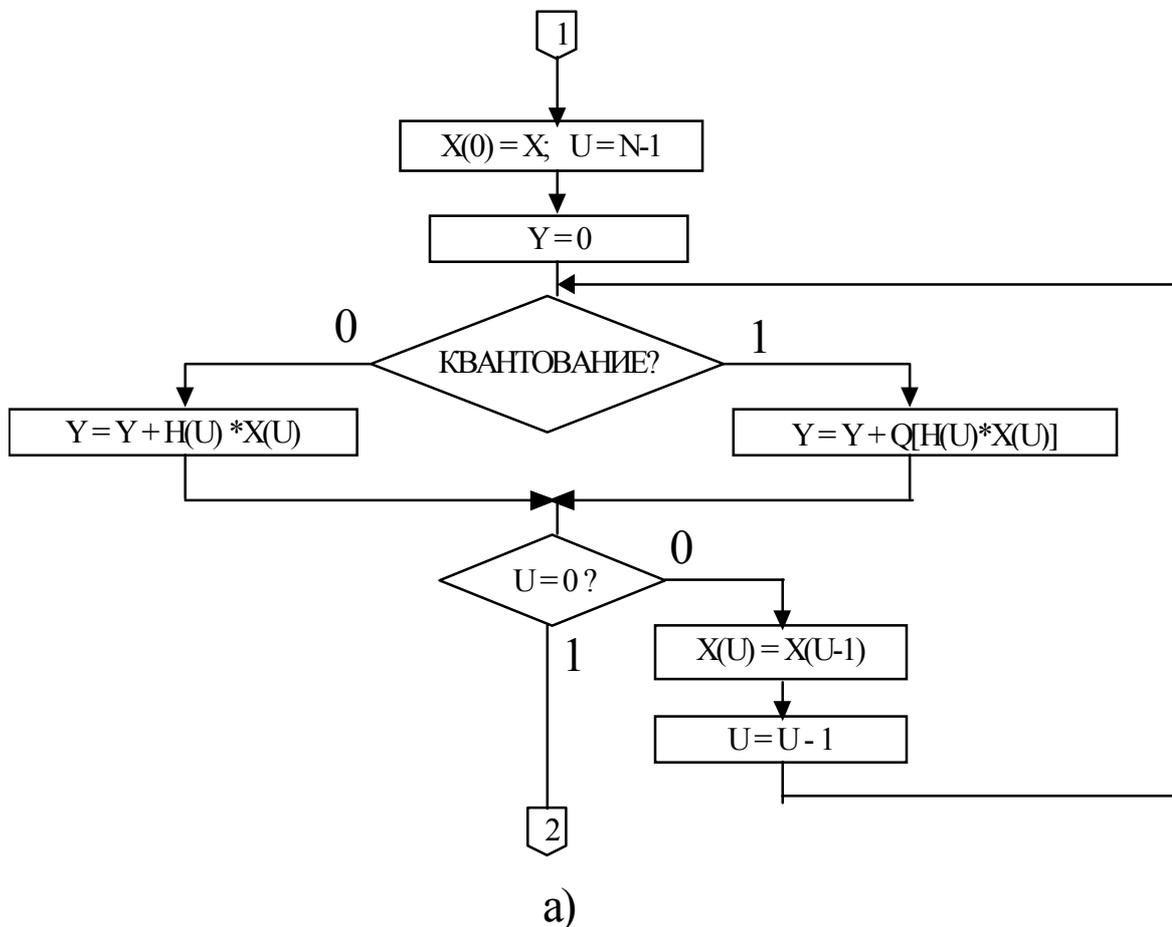


Рис. 4.14. Граф-схемы алгоритмов моделирования НФ со сдвигом (а) и без сдвига сигнальной памяти (б)

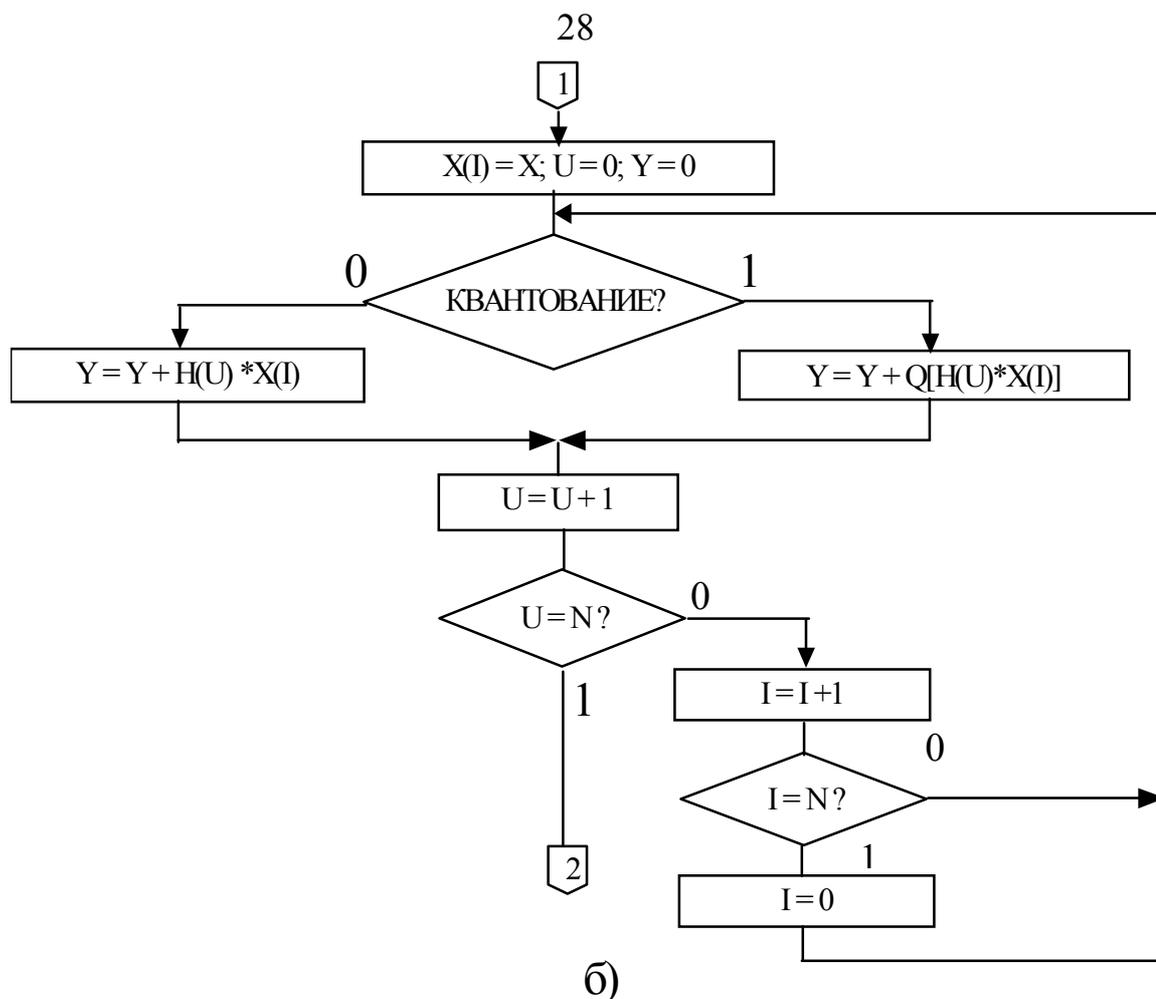


Рис. 4.14. Окончание

В заключение следует еще раз заметить, что рассмотренные алгоритмы моделирования ЦФ и их граф-схемы могут быть использованы также при программной реализации точных ЦФ и ЦФ с конечной разрядностью чисел.

4.14. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНЕЧНОЙ РАЗРЯДНОСТИ ЧИСЕЛ

4.14.1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КОНЕЧНОЙ РАЗРЯДНОСТИ ЧИСЕЛ ДЛЯ РЕКУРСИВНОГО ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА

В соответствии с рассмотренными методами для синтезированного в главе 3 (см. п. 3.2.8) рекурсивного цифрового фильтра рассчитаны масштабные множители, выходные шумы квантования АЦП и произведений, получены отклики фильтра на гармонические сигналы, вычислены статистические оценки шума квантования на выходе фильтра. Расчеты и моделирование выполнены с помощью программы РФ-СИНТЕЗ. Ниже приводятся протокол расчетов и графики, выводимые программой.

Параметры структуры ЦФ -----
 Форма реализации фильтра - каскадная
 Форма реализации звена - прямая
 Способ ограничения разрядности - усечение
 Ограничение разрядности коэффициентов = 15 бит

```

----- Результаты анализа ЦФ -----
---- Масштабные множители фильтра
Временной ММ = 0.00019219
Спектральный ММ = 0.000501605
Статистический ММ = 0.000727275
---- Масштабные множители звеньев
Временной ММ [01]-го звена = 0.127662
Временной ММ [02]-го звена = 0.336425
Временной ММ [03]-го звена = 0.105275
Временной ММ [04]-го звена = 1.777546
Временной ММ [05]-го звена = 0.070798
Спектральный ММ [01]-го звена = 0.186660
Спектральный ММ [02]-го звена = 0.382198
Спектральный ММ [03]-го звена = 0.089395
Спектральный ММ [04]-го звена = 2.834861
Спектральный ММ [05]-го звена = 0.089395
Статистический ММ [01]-го звена = 0.807323
Статистический ММ [02]-го звена = 0.438159
Статистический ММ [03]-го звена = 0.195133
Статистический ММ [04]-го звена = 1.543203
Статистический ММ [05]-го звена = 0.060642
Выбранный тип масштабирования
- масштабирование сигнала на входе каждого звена
- тип ММ - спектральный ММ

----- Расчет ШК АЦП и произведений -----
Разрядность АЦП = 11 бит
Макс. значение шума АЦП = 0.00393058428
Дисперсия шума АЦП = 9.20688043E-9
СКЗ шума АЦП = 9.59524905E-5
Разрядность произведений = 15 бит
Максимальное значение шума умножителей = 0.00430726832
Дисперсия шума умножителей = 2.44449647E-9
СКЗ шума умножителей = 4.94418494E-5

----- Параметры моделирования ЦФ -----
---- Параметры канала А
Аддитивный белый шум - отсутствует
Ограничение разрядности АЦП = 11 бит
Ограничение разрядности произведений = 15 бит
---- Параметры канала В
Аддитивный белый шум - отсутствует
Ограничение разрядности АЦП = 16 бит
Ограничение разрядности произведений = 16 бит
----- Тип входного сигнала X(n) -----
Тип сигнала - Гармоническое колебание
Амплитуда = 1 Вольт
Частота = 10000 Гц
Начальная фаза = 0 Градусов
----- Результаты моделирования ЦФ -----
Максимальное значение входного сигнала = 1
Мощность входного сигнала = 0.5002712
СКЗ входного сигнала = 0.7072985

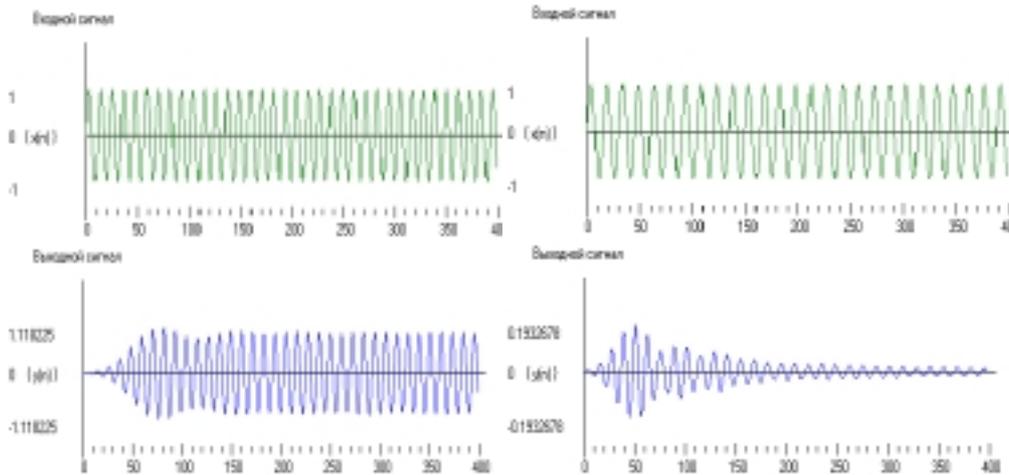
Максимальное значение выходного сигнала = 1.116302
Мощность выходного сигнала = 0.4580178
СКЗ выходного сигнала = 0.6767702

Максимальное значение входного шума = 0.0006892182
Мощность входного шума = 1.300168E-7
СКЗ входного шума = 0.0003605784

Максимальное значение выходного шума = 0.005005992
Мощность выходного шума = 3.254512E-6
СКЗ выходного шума = 0.001804027

```

Частота сигнала 10000 Гц Частота сигнала 7500 Гц



4.14.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КОНЕЧНОЙ РАЗРЯДНОСТИ ЧИСЕЛ ДЛЯ НЕРЕКУРСИВНОГО ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА

Ниже приводятся полученные с помощью программы НФВФ-СИНТЕЗ результаты решения задач конечной разрядности чисел для НФ, синтезированного в главе 3 (п. 3.3.7) методом весовых функций.

```

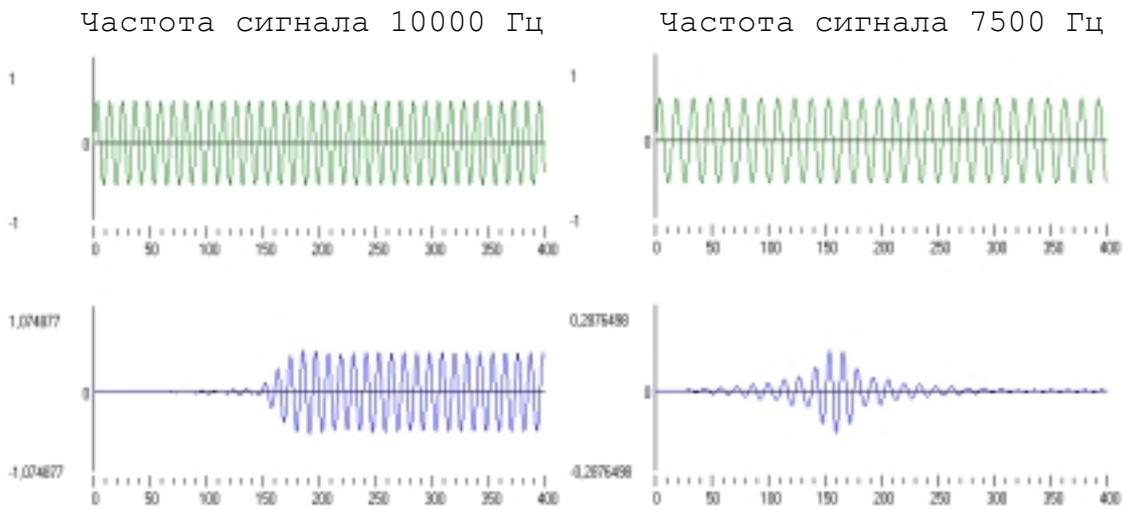
Тип весовой функции - Кайзера
  Параметр БЕТА =3,5
Число отсчетов весовой функции           = 321
Ограничение разрядности коэффициентов     = 15 бит. (Способ - усечение)
Ограничение разрядности произведений      = 15 бит. (Способ - усечение)
Ограничение разрядности АЦП              = 11 бит. (Способ - усечение)
.....
Временной масштабный множитель           = 0,42403
Спектральный масштабный множитель        = 0,99129
Статистический масштабный множитель      = 1,292
.....
Максимальное значение шума АЦП           = 0,001151524
Дисперсия шума АЦП                       = 2,708647E-6
СКЗ шума АЦП                             = 0,001645797
Максимальное значение шума умножителей   = 0,009796143
Дисперсия шума умножителей               = 2,491288E-8
СКЗ шума умножителей                     = 0,0001578381
.....
:~::~: Входной сигнал :~::~:
Тип сигнала - Гармоническое колебание
Амплитуда                                 = 1 Вольт
Частота                                   = 10000 Гц
Начальная фаза                           = 0 Градусов
Белый шум отсутствует
:~::~: Результаты моделирования :~::~:
Максимальное значение входного сигнала    = 0,8467242
Мощность входного сигнала                 = 0,2491902
СКЗ входного сигнала                      = 0,4991895

Максимальное значение выходного сигнала   = 1,077576
Мощность выходного сигнала                = 0,3492659
СКЗ выходного сигнала                     = 0,5909873

Максимальное значение входного шума       = 0,0004429269
Мощность входного шума                    = 4,875648E-8
СКЗ входного шума                         = 0,0002208087

```

Максимальное значение выходного шума	= 1,086114
Мощность выходного шума	= 0,08437563
СКЗ выходного шума	= 0,2904748



КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каковы источники погрешностей ЦОС, связанные с конечной разрядностью чисел?
2. Какие способы представления и форматы чисел используются в цифровых фильтрах?
3. Чем вызывается необходимость ограничения разрядности чисел в процессе обработки сигнала в РФ?
4. Чем обусловлена необходимость масштабирования сигналов в ЦФ и как оно осуществляется?
5. Каковы условия масштабирования сигналов в ЦФ?
6. В чем суть и различие используемых методов расчета ММ?
7. Как зависит выбор метода расчета ММ от вида сигнала?
8. Как рассчитать ММ для каскадной формы РФ?
9. В чем особенности расчета ММ РФ при прямой и канонической форме реализации их звеньев?
10. Как проверяется правильность выбора ММ с помощью моделирования ЦФ на ЭВМ?
11. Как строятся и используются шумовые эквивалентные схемы при оценке точности ЦФ?
12. В чем суть детерминированного и вероятностного методов оценки точности ЦФ?
13. В чем различие детерминированной и вероятностной оценок точности ЦФ?
14. Как зависит выбор метода расчета точности ЦФ от особенностей сигнала?

15. Как рассчитать шумы квантования АЦП на выходе ЦФ?
16. Как рассчитать шумы квантования произведений для каскадной формы реализации РФ?
17. Как рассчитать шумы квантования произведений для НФ на основе ДВС?
18. Из каких условий и как рассчитываются необходимые значения разрядностей АЦП и умножителей (произведений)?
19. Как влияет включение ММ на отношение сигнала к шуму квантования на выходе ЦФ?
20. Как влияет ограничение разрядности коэффициентов ЦФ?
21. Как решаются задачи оценки и обеспечения точности ЦФ с помощью моделирования на ЭВМ?
22. Как моделируется программно ограничение разрядности чисел в ЦФ?

5. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ С КОНЕЧНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ

5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ), иллюстрируемое рис. 5.1, соответствует выборкам непрерывного преобразования Фурье (или спектра) $X(j\omega)$ дискретной последовательности $x(n)_{N_I}$ конечной длины N_I , вычисленным на дискретных равностоящих частотах $\omega_k = k \Delta\omega$:

$$\text{ДПФ}_N[x(n)] = X(j\omega) |_{\omega=\omega_k} = \sum_{n=0}^{N_I-1} x(n) e^{-j\omega_k n T_d}, \quad (5.1)$$

где $\Delta\omega = \omega_d/N$ – шаг дискретизации по частоте; N – число вычисляемых частотных выборок ДПФ в полосе частот $0 - \omega_d$, в общем случае не равное N_I ; $k = 0, 1 \dots N-1$ – номер частотной выборки.

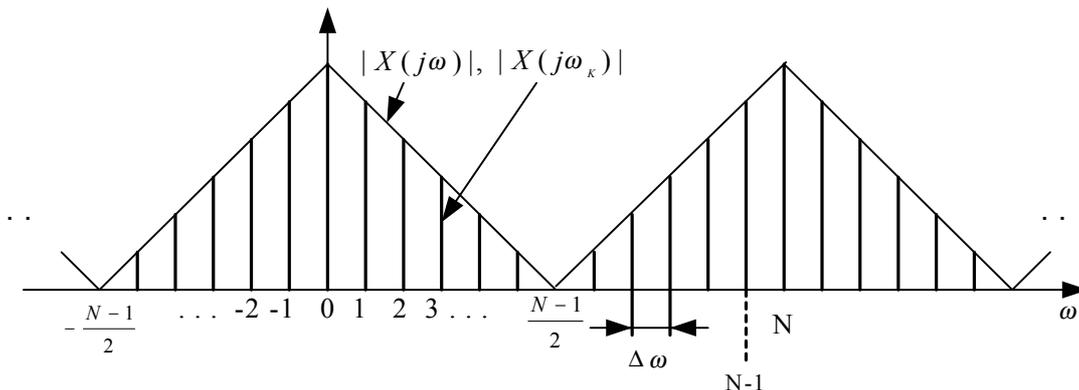


Рис. 5.1. Дискретизация сигнала в частотной области

Выбор шага дискретизации по частоте определяется возможностью восстановления сигнала $x(n)$ и его непрерывного спектра $X(j\omega)$ по ДПФ.

Восстановление сигнала по дискретизированному по частоте спектру осуществляется с помощью обратного ДПФ (ОДПФ). Как и прямое ДПФ (5.1), ОДПФ может быть получено путем дискретизации по частоте непрерывного обратного преобразования Фурье:

$$x(n) = \frac{T_d}{2\pi} \int_0^{\omega_d} X(j\omega) e^{j\omega n T_d} d\omega.$$

Используя замены $d\omega \rightarrow \omega_d/N$; $\int \rightarrow \Sigma$; $\omega \rightarrow \omega_k$, находим

$$\text{ОДПФ}_N[X(j\omega_k)] = x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(j\omega_k) e^{j\omega_k n T_d}. \quad (5.2)$$

Сигнал $x_p(n)$ периодичен с периодом N : $x_p(n) = x_p(n - iN)$, $i = 0, \pm 1, \dots$ и связан с сигналом $x(n)$ соотношением $x_p(n) = \sum_i x(n - iN)$.

При $N \geq N_l$ $x_p(n) = x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, т.е. сигнал $x_p(n)$ на интервале $0.. N - 1$ точно совпадает с исходным сигналом $x(n)$, дополненным $(N - N_l)$ нулевыми отсчетами и является периодическим его продолжением за пределами этого интервала (рис. 5.2). ОДПФ, вычисляемое на интервале $0.. N - 1$, обеспечивает в данном случае точное восстановление сигнала $x(n)$ по его ДПФ.

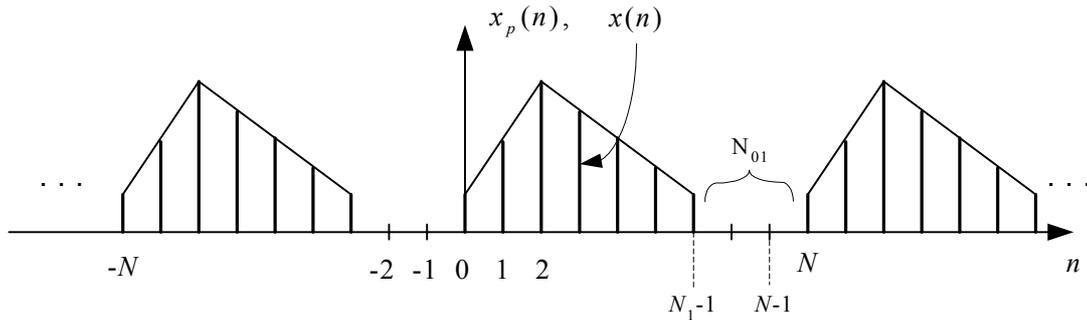


Рис. 5.2. Сигнал, соответствующий ОДПФ при $N \geq N_l$

При $N < N_l$ ($\Delta\omega = \omega_d/N > \omega_d/N_l$) имеет место перекрытие периодизированных с периодом N последовательностей $x(n)$ (явление наложения во временной области), так что $x_p(n) \neq x(n)$ при $n = 0.. N_l - 1$ (рис. 5.3). Это исключает возможность точного восстановления сигнала по его дискретизированному спектру.

Соотношение $N \geq N_l$ определяет условие выбора шага дискретизации по частоте $\Delta\omega \leq \omega_d/N_l$, которое отвечает также теореме Котельникова в частотной области (спектр сигнала конечной длительности может быть точно восстановлен по его частотным выборкам, взятым с вышеуказанным шагом по частоте $\Delta\omega$). Вычисление ДПФ по числу точек N , превышающему длину последовательности N_l (дополняемую в этом случае $(N - N_l)$ нулевыми отсчетами), эквивалентно интерполяции по частоте спектра, дискретизированного с максимально возможным шагом $\Delta\omega = \omega_d/N_l$. Дополнение $x(n)$ нулевыми отсчетами используется для повышения частотного разрешения ДПФ.

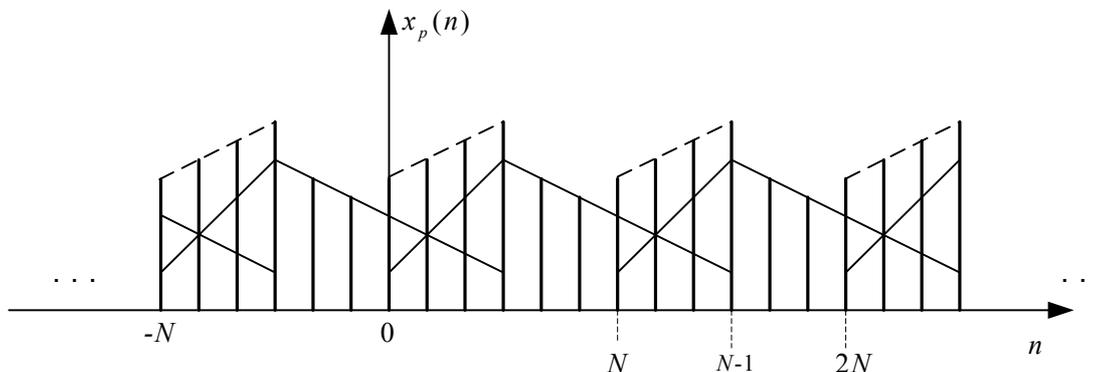


Рис. 5.3. Сигнал, соответствующий ОДПФ при $N < N_l$

Таким образом, N -точечное ДПФ соответствует спектру периодизированной с периодом N исходной последовательности $x(n)_{N_l}$ конечной длины $N_l \leq N$. ДПФ совпадает также с преобразованием Фурье периодической последовательности $x_p(n)$ с периодом, равным N , имеющей линейчатый спектр.

Пару преобразований ДПФ – ОДПФ (5.1), (5.2) представляют как в виде функции дискретной частоты ω_k , так и номера частотной выборки k :

$$\text{ДПФ}_N[x(n)] = X(j\omega_k) = X(jk) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1.. N-1. \quad (5.3)$$

$$\text{ОДПФ}_N[X(jk)] = x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(jk)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1.. N-1. \quad (5.4)$$

Вычисление ОДПФ и ДПФ требует N^2 операций умножения и $N(N-1)$ операций сложения комплексных чисел. Оба преобразования используют единый вычислительный алгоритм, основанный на их достаточно простой взаимосвязи:

$$\text{ОДПФ}_N[X(jk)] = \frac{1}{N} \{ \text{ДПФ}_N[X^*(jk)] \}^*,$$

где $*$ – операция комплексного сопряжения.

Граф-схема алгоритма программной реализации ДПФ для комплексных последовательностей приведена на рис. 5.4. Входными данными программы являются реальная $x_{re}(n)$ и мнимая $x_{im}(n)$ составляющие преобразуемой последовательности $x(n)$, ее длина N_l и число точек ДПФ N , выходными – реальная $X_{re}(jk)$, мнимая $X_{im}(jk)$ составляющие, модуль $|X(jk)|$ и аргумент $\varphi(k)$ ДПФ $X(jk)$.

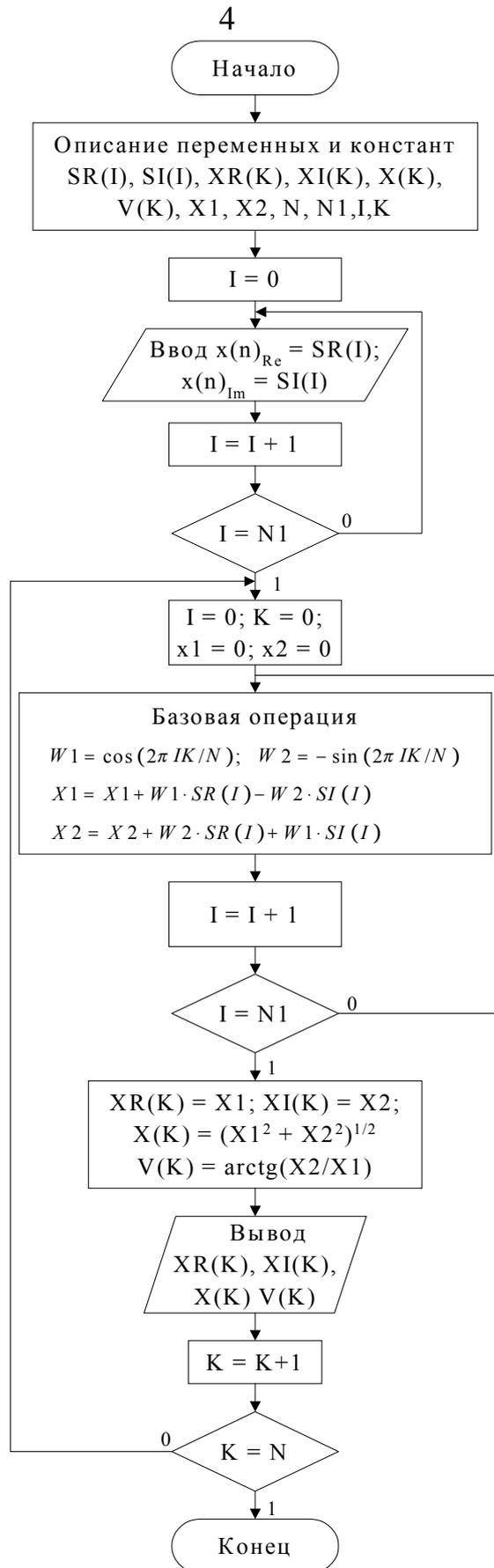


Рис. 5.4. Граф-схема алгоритма программной реализации ДПФ

Соответствующие им программные переменные обозначены как $SR(I)$, $SI(I)$ (для входной последовательности) и $XR(I)$, $XI(I)$, $X(k)$ и $V(k)$ (для выходной последовательности).

Для вычисления ОДПФ нужно дополнительно ввести операции изменения знака на обратный перед мнимыми составляющими входной и выходной последовательностей (переменными $SI(I)$ и $XI(I)$) и деления $XR(I)$, $XI(I)$, $X(k)$ на N .

5.2. СВОЙСТВА ДПФ

ДПФ обладает теми же свойствами, что и непрерывное преобразование Фурье, в том числе периодичностью и симметрией.

Наиболее важной для цифровой фильтрации является связь ДПФ и свертки дискретных последовательностей. Для дискретных последовательностей различают **круговую** (приодическую) и **линейную** свертки.

Круговая свертка определяется для периодических последовательностей $x_1(n)$, $x_2(n)$ с периодом N в соответствии с выражением [14]:

$$y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m)x_1(n-m) .$$

Она также является периодической последовательностью с периодом N . Известно, что свертке последовательностей во временной области отвечает умножение их в частотной, т. е. непрерывное преобразование Фурье свертки двух последовательностей равно произведению преобразований Фурье этих последовательностей: $Y(j\omega) = X_1(j\omega)X_2(j\omega)$ (**теорема о свертке**). В случае периодических последовательностей с периодом N преобразование Фурье вычисляется на дискретных частотах $\omega_k = k\omega_d/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ и совпадает с ДПФ последовательности конечной длины N , периодизированной с периодом N . Поэтому круговой свертке периодических последовательностей соответствует произведение ДПФ, вычисляемых по одному периоду, т. е. по N точкам этих последовательностей:

$$\text{ДПФ}_N[y(n)] = \text{ДПФ}_N[x_1(n)] \text{ДПФ}_N[x_2(n)] \quad \text{или} \quad Y(j\omega_k) = X_1(j\omega_k)X_2(j\omega_k) .$$

Выполняя ОДПФ, можно с помощью ДПФ вычислить круговую свертку периодических последовательностей:

$$y(n) = \text{ОДПФ}_N \{ \text{ДПФ}_N[x_1(n)] \text{ДПФ}_N[x_2(n)] \} .$$

Линейная свертка определяется для конечных последовательностей $x_1(n)_{N_1}$ длиной N_1 и $x_2(n)_{N_2}$ длиной N_2 :

$$y(n)_N = x_1(n)_{N_1} * x_2(n)_{N_2} = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N_2-1} x_2(m)x_1(n-m) .$$

Из графиков рис. 5.5 следует, что сигнал линейной свертки $y(n)$ имеет длину $N = N_1 + N_2 - 1$. Чтобы применить в данном случае теорему о свертке, ДПФ

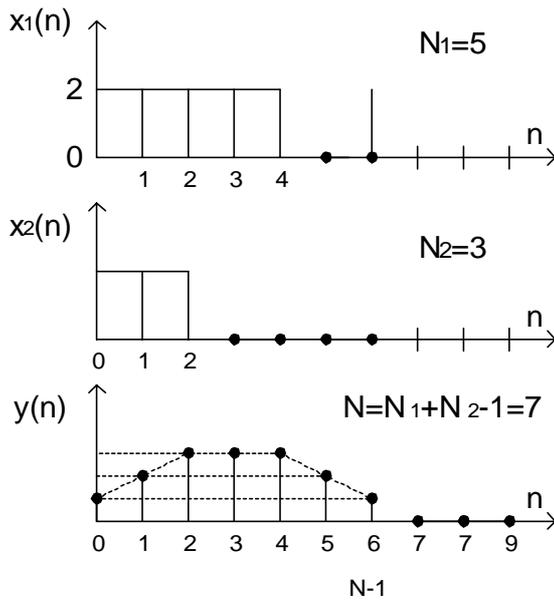


Рис. 5.5. Иллюстрация ДВС

последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$ необходимо вычислить по одинаковому числу точек N , соответствующему длине последовательности $y(n)$, с одинаковым шагом дискретизации по частоте $\Delta\omega = \omega_d / N$, т. е.

$$\text{ДПФ}_N[y(n)] = \text{ДПФ}_N[x_1(n)]\text{ДПФ}_N[x_2(n)]$$

или $Y(j\omega_k) = X_1(j\omega_k)X_2(j\omega_k)$,
 $k = 0, 1, \dots, N-1$.

При этом последовательности $x_1(n)$ и $x_2(n)$ дополняются N_{01} , N_{02} нулевыми отсчетами: $N_{01} = N - N_1$, $N_{02} = N - N_2$, что обеспечивает в частотной области интерполяцию их дискретизированного спектра.

Сигнал $y(n)$ в соответствии с данным свойством также может быть определен с помощью ОДПФ от произведения N -точечных ДПФ свертываемых последовательностей $x_1(n)$, $x_2(n)$:

$$y(n) = \text{ОДПФ}_N \{ \text{ДПФ}_N[x_1(n)] \text{ДПФ}_N[x_2(n)] \} \quad (5.5)$$

или

$$y(n) = \text{ОДПФ}_N [Y(j\omega_k)]; \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Выражение (5.5) представляет **алгоритм вычисления линейной свертки конечных последовательностей в частотной области**. При использовании рассматриваемых далее алгоритмов быстрого преобразования Фурье его называют также **алгоритмом быстрой свертки**. Очевидно, что ДПФ линейной свертки последовательностей конечной длины $x_1(n)_{N_1}$, $x_2(n)_{N_2}$ эквивалентно ДПФ круговой свертки последовательностей, полученных путем периодизации их с периодом $N = N_1 + N_2 - 1$. Вычисление линейной свертки с помощью ДПФ по числу точек $N < N_1 + N_2 - 1$ приводит к наложению во временной области, которое может быть также наглядно интерпретировано посредством круговой свертки последовательностей $x_1(n)_{N_1}$, $x_2(n)_{N_2}$, периодизированных с периодом $N < N_1 + N_2 - 1$.

5.3. АЛГОРИТМ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ КОНЕЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НА ОСНОВЕ ДПФ

Свойство ДПФ свертки конечных последовательностей используют для реализации КИХ-фильтров с обработкой сигнала в частотной области. Сигнал на выходе такого фильтра определяется дискретной временной сверткой (ДВС) входной последовательности $x(n)$ (в данном случае конечной длины N_1) с конечной импульсной характеристикой $h(n)$ длиной N_2 :

$$y(n)_N = \sum_{m=0}^{N_2-1} h(m)x(n-m), n = 0, 1, \dots, N-1; N = N_1 + N_2 - 1.$$

Прямое вычисление ДВС во временной области реализуют нерекурсивные цифровые фильтры, рассмотренные в главе 2 (НФ на основе ДВС).

При обработке в частотной области ДВС может быть вычислена в соответствии с алгоритмом (5.5):

$$y(n) = \text{ОДПФ}_N \{ \text{ДПФ}_N[h(n)] \text{ДПФ}_N[x(n)] \}, n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.6)$$

или

$$y(n) = \text{ОДПФ}_N [H(j\omega_k)X(j\omega_k)].$$

В данном случае его называют **алгоритмом цифровой фильтрации последовательностей конечной длины на основе ДПФ**. Он представлен структурной схемой рис. 5.6 и частотными диаграммами рис. 5.7.

В этом алгоритме ДПФ импульсной характеристики $h(n)$ $H(j\omega_k) = \sum_{m=0}^{N_2-1} h(m)e^{-j\omega_k m T_d} = Y(j\omega_k) / X(j\omega_k)$ соответствует дискретизированной частотной характеристике фильтра (ДЧХ), а $X(j\omega_k)$, $Y(j\omega_k)$ – дискретизированным спектрам его входной и выходной последовательностей.

Алгоритм включает следующие операции:

запоминание N_1 отсчетов входной последовательности $x(n)$;

вычисление N -точечных ДПФ последовательностей $x(n)$ и $h(n)$;

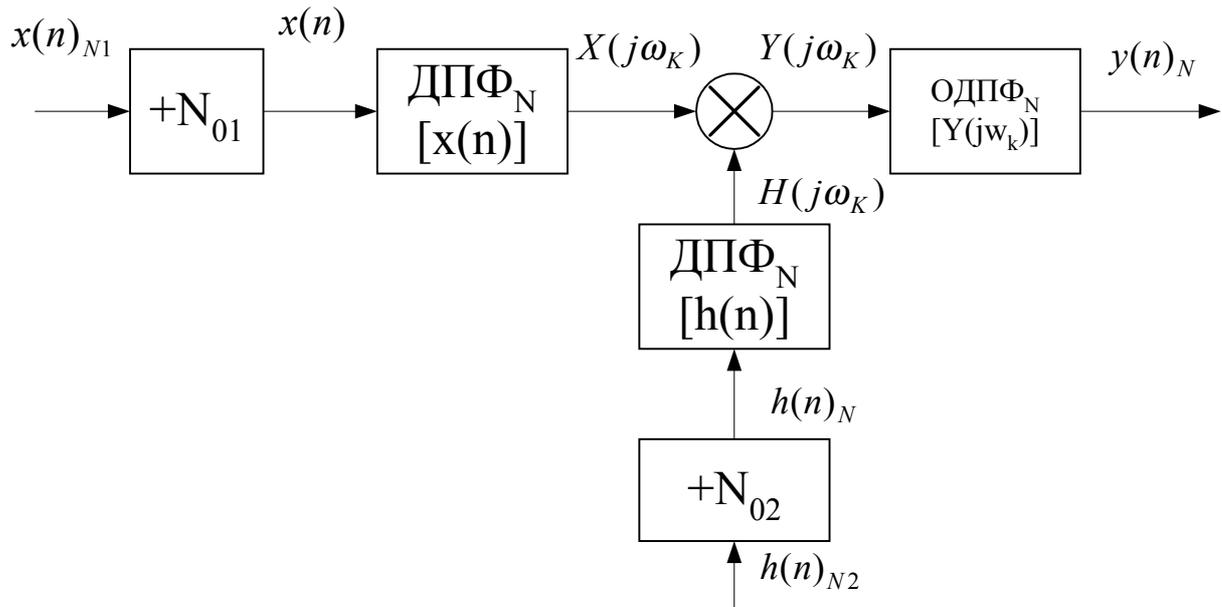


Рис. 5.6. Структурная схема НФ на основе ДПФ

перемножение N частотных выборок ДПФ входной последовательности и ДЧХ фильтра и образование N -точечной последовательности $Y(j\omega_k) = H(j\omega_k)X(j\omega_k)$;

вычисление N -точечного ОДПФ последовательности $Y(j\omega_k)$, в результате чего получаются N отсчетов выходной последовательности $y(n)$.

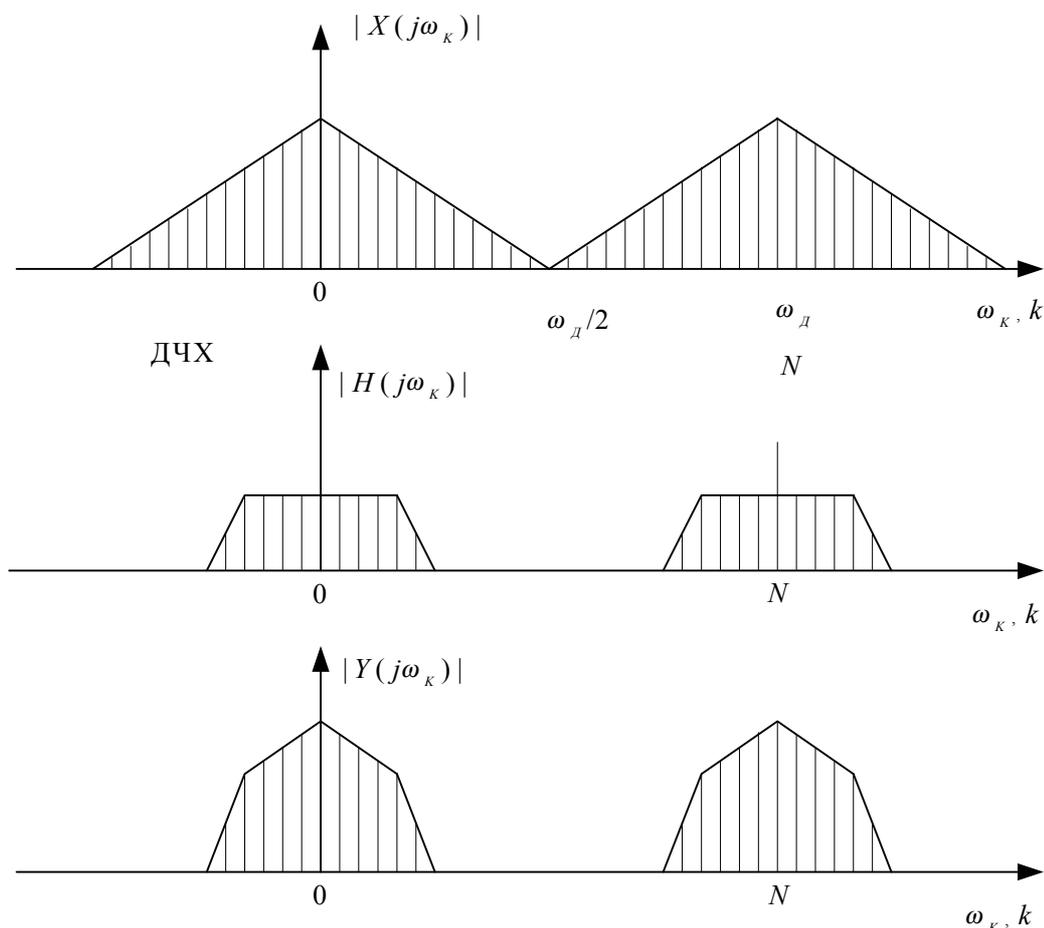


Рис. 5.7. Частотные диаграммы сигналов в структуре НФ на основе ДПФ

Таким образом, в данном алгоритме отсчеты выходного сигнала находятся по частотным выборкам входного сигнала, взвешенным заданной частотной характеристикой фильтра. Фильтрация осуществляется путем последовательного перехода из временной области в частотную, обработки сигнала в частотной области и обратного перехода во временную.

Коэффициентами фильтров на основе ДПФ могут быть как отсчеты его импульсной характеристики, так и непосредственно дискретизированной частотной характеристики $H(j\omega_k)$.

Особенностью алгоритма является наличие временного запаздывания в выдаче отсчетов выходного сигнала, которые получаются только после приема всей входной последовательности и ее обработки. В связи с этим следует заметить, что временное запаздывание свойственно всем физически

реализуемым системам обработки сигналов и различие здесь носит в основном количественный характер.

Для реализации фильтра необходима память для записи комплексных последовательностей $x(n)$, $X(j\omega_k)$, $Y(j\omega_k)$, $y(n)$ и коэффициентов $H(j\omega_k)$ длиной N . Обработка включает также $K_{\text{умн}} = 4(2N^2 + N)$ операций умножения и $K_{\text{слож}} = 4(N-1)N$ операций сложения вещественных чисел. В пересчете на один отсчет выходного сигнала это соответствует числу операций $K_{\text{умн}(1)} = 4(2N+1)$ и $K_{\text{слож}(1)} = 4(N-1)$.

По объему вычислений фильтр на основе ДПФ уступает НФ с обработкой во временной области – фильтру на основе ДВС, где на один отсчет сигнала выполняется N_2 операции умножения. Однако эффективность его существенно возрастает при использовании для вычисления ДПФ и ОДПФ алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ). Так, алгоритмы БПФ по основанию 2 требуют $2N \log_2 N$ операций умножения и столько же операций сложения вещественных чисел. Общее и приведенное к одному отсчету число операций для НФ на основе БПФ при этом составит $K_{\text{умн}} = 4N[(\log_2 N) + 1]$, $K_{\text{слож}} = 4N \log_2 N$ и $K_{\text{умн}(1)} = 4[(\log_2 N) + 1]$, $K_{\text{слож}(1)} = 4 \log_2 N$. При $N = 1024$ $K_{\text{умн}(1)} = 44$, $K_{\text{слож}(1)} = 40$. Для НФ на основе ДВС число операций зависит от длины импульсной характеристики N_2 и при $N_2 = N/2$ составит $K_{\text{умн}(1)} = K_{\text{слож}(1)} = 512$.

Таким образом, реализация НФ на основе БПФ требует намного меньшего объема операций. При более точной оценке и использовании других известных алгоритмов БПФ эффективность данной реализации оказывается еще выше. По объему вычислений цифровые фильтры на основе БПФ конкурентно способны с рекурсивными цифровыми фильтрами (но не по объему памяти).

5.4. ФИЛЬТРАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ БОЛЬШОЙ ДЛИНЫ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМА НА ОСНОВЕ ДПФ (СЕКЦИОНИРОВАННЫЕ СВЕРТКИ)

Алгоритм цифровой фильтрации в частотной области можно применить и к обработке последовательностей, длина которых намного превышает длину импульсной характеристики фильтра, т. е. практически не ограниченных по длине.

В этом случае входную последовательность $x(n)$ представляют суммой $x(n) = \sum_l x_l(n)$ конечного или бесконечного числа примыкающих друг к другу секций $x_l(n)_{N_l}$ конечной длины N_l , определяемых как

$$x_l(n)_{N_l} = \begin{cases} x(n + lN_1), & lN_1 \leq n \leq (l+1)N_1 - 1 \\ 0, & \text{для других } n \end{cases}$$

где $l = 0, 1, 2, \dots$ – номер такой секции.

Свертка входной последовательности $x(n)$ с импульсной характеристикой фильтра $h(n)$ при этом также может быть представлена в соответствии с принципом суперпозиции суммой частичных сверток $y_l(n)_N$ конечной длины

$$N = N_1 + N_2 - 1: y(n) = \sum_l y_l(n), \text{ где } y_l(n)_N = \sum_{m=0}^{N_2-1} h(m)x_l(n-m).$$

Соседние частичные свертки перекрываются и суммируются на интервале, равном длине импульсной характеристики $N_2 - 1$. Длина секции выбирается, как правило, соизмеримой с длиной импульсной характеристики и отвечающей условию $N_1 \geq N_2$, при котором перекрываются только две соседние l и $(l+1)$ -я частичные свертки (рис. 5.8).

Каждая из частичных сверток вычисляется на основе алгоритма ДПФ с применением БПФ:

$$y_l(n)_N = \text{ОДПФ}_N[H(j\omega_k)X_l(j\omega_k)].$$

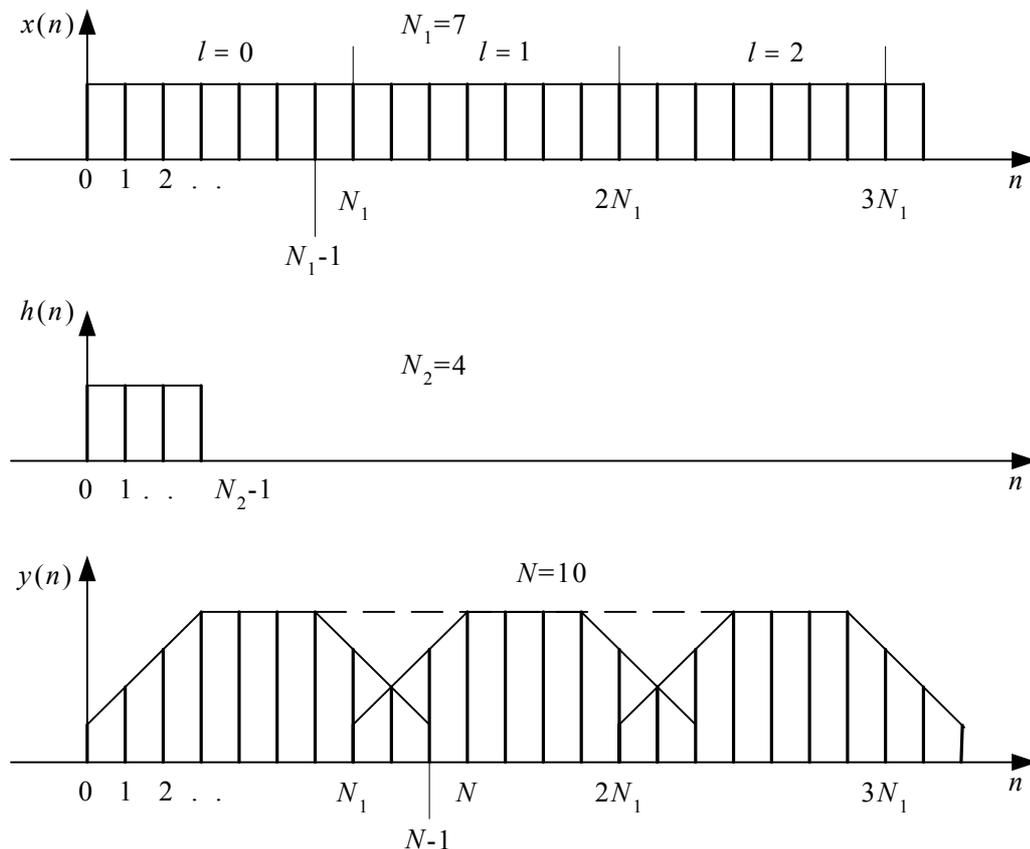


Рис. 5.8. Временные диаграммы сигналов при цифровой фильтрации последовательностей большой длины

Обработка предыдущей секции сигнала при этом совмещается с записью новой, так что запаздывание выходного сигнала во времени не превышает длины одной секции.

В качестве примера определим длину секции и число точек БПФ при реализации на основе БПФ нерекурсивного цифрового фильтра, синтезированного в п. 3.3.7 методом весовых функций. Длительности импульсной характеристики фильтра $N_2 = 321$ соответствует ближайшее число точек N для вычисления БПФ, равное 1024, и длина секции $N_1 = 703$. Число операций умножения на один отсчет сигнала в этом случае равно $K_{умн(1)} = 4N(\log_2 N + 1) / N_1 = 64$. Оно значительно меньше числа умножений $K_{умн(1)} = N_2 = 321$, необходимых при прямой форме реализации НФ (на основе ДВС). Для рекурсивного фильтра 10-го порядка с аналогичными параметрами частотной характеристики, синтезированного в п. 3.2.8, вычислительная эффективность составляет 25 операций умножения на один отсчет, т. е. более чем в 2 раза выше. Однако у такого фильтра, использующего аппроксимацию Золотарева – Кауэра, существенно нелинейная ФЧХ.

Значениям $N = 2048, 4096$ и 8192 соответствуют значения длины секции $N_1 = 1727, 3775, 7871$ и число операций умножения на отсчет сигнала $K_{умн(1)} = 57, 56,4$ и $58,3$. Как видим, значение $N = 2048$ является оптимальным для данного цифрового фильтра по объему вычислений и объему памяти.

На основе БПФ может быть реализован также нерекурсивный цифровой фильтр, синтезированный методом частотной выборки в п. 3.4.4.

5.5. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ ДПФ

Общая граф-схема алгоритма программной реализации цифровых фильтров на основе ДПФ для коротких и длинных комплексных последовательностей приведена на рис. 5.9. Входными данными для нее являются длина импульсной характеристики N_2 , длина реализации или секции сигнала N_1 , число точек N для вычисления ДПФ и ОДПФ, вид входной последовательности – конечная ($M = 0$) или бесконечная ($M = 1$), а также значения реальной и мнимой составляющих ДЧХ $HR(I), HI(I)$ и входной последовательности $x(n)_{re} = SR(I), x(n)_{im} = SI(I)$, выходными – также значения реальной и мнимой составляющих комплексной (в общем случае) выходной последовательности $y(n)_{re}, y(n)_{im}$. Массивы отсчетов входного сигнала $SR(I), SI(I)$ в процессе обработки замещаются массивами произведений ДПФ входной последовательности и ДЧХ. Фильтрация конечной и бесконечной последовательностей отличается подготовкой и выводом выходных данных. Перекрывающиеся значения предыдущей частичной свертки при $M=1$ сохраняются в массивах $YR(L), YI(L)$, которые в начале обработки обнуляются.

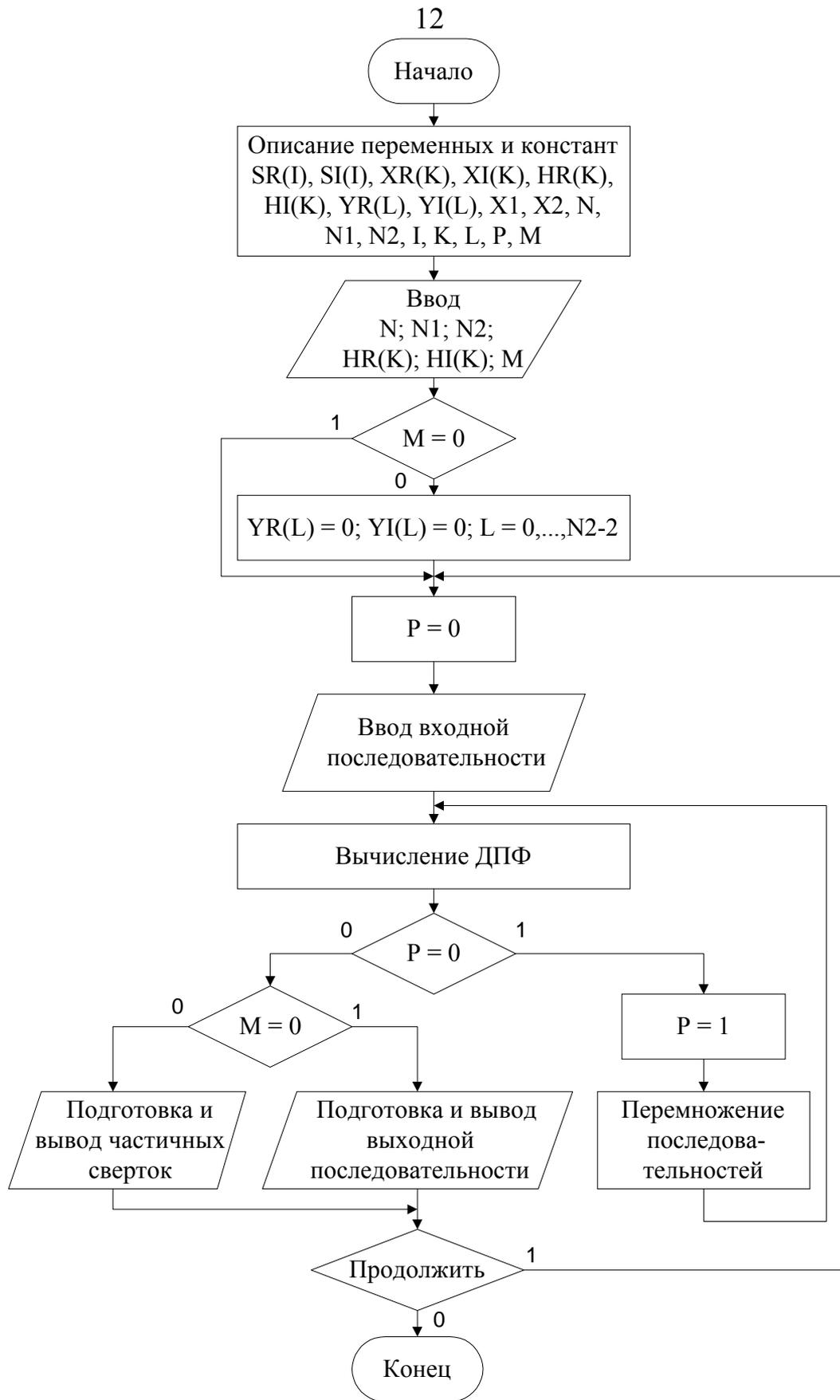


Рис. 5.9. Граф-схема алгоритма программной реализации ЦФ на основе ДПФ при обработке последовательностей конечной и бесконечной длины

Развернутые граф-схемы алгоритмов ввода входной последовательности и ее дополнения нулевыми отсчетами, вычисления ДПФ, перемножения по последовательностям, подготовки и вывода частичных свертков и выходной последовательности представлены на рис. 5.10, 5.11.

На граф-схемах учтены операции комплексного сопряжения, которые необходимы при вычислении ОДПФ ($p = 1$) с помощью алгоритма ДПФ.

Для программной реализации НФ в общем случае требуется $6N$ ячеек памяти для последовательностей $SR(I)$, $SI(I)$, $XR(K)$, $XI(K)$, $HR(K)$, $HI(K)$ и $2N_1$ ячеек для переменных $YR(L)$, $YI(L)$.

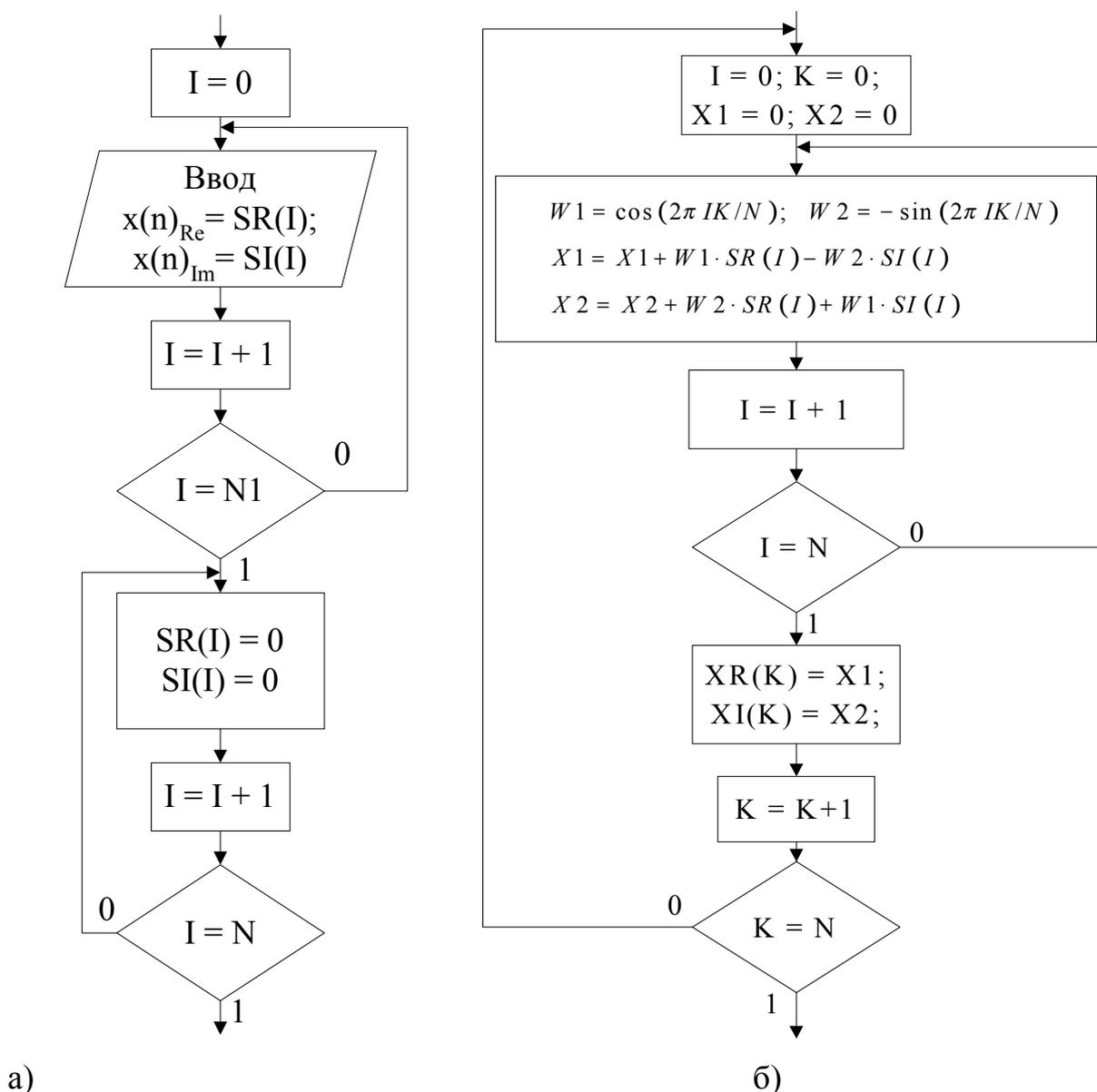


Рис. 5.10. Граф-схемы алгоритмов ввода и дополнения нулями входной последовательности (а) и вычисления ДПФ (б)

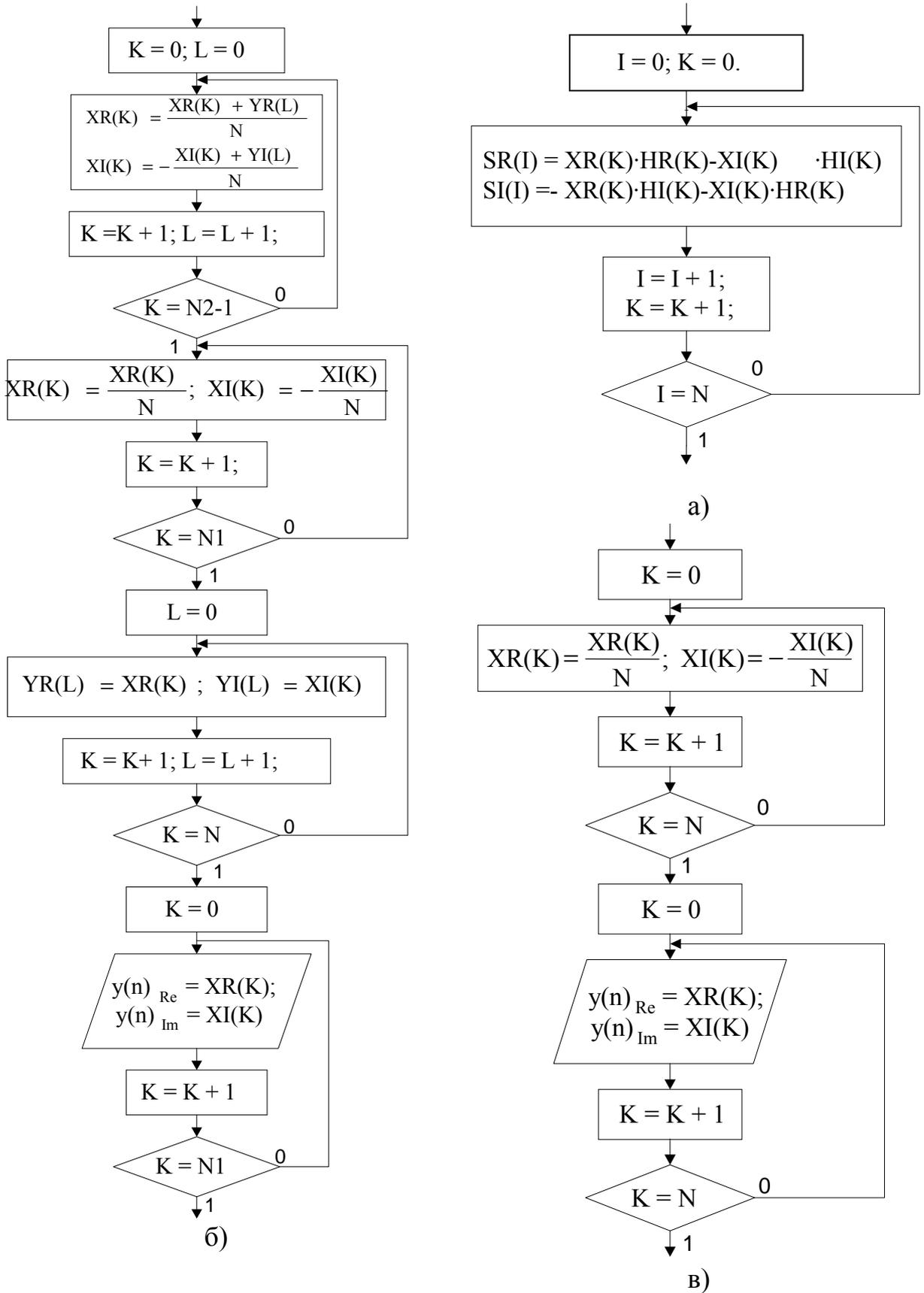


Рис. 5.11. Граф-схемы алгоритмов перемножения комплексных последовательностей (а), подготовки и вывода частичных свертков (б) и подготовки и вывода выходной последовательности (в)

Вопросы, связанные с конечной точностью вычислений (масштабирования, квантования произведений и коэффициентов) при реализации ДПФ и ЦФ с обработкой в частотной области, решаются как расчетным путем, в том числе с помощью шумовых эквивалентных схем для шумов квантования, так и путем моделирования на ЭВМ [14]. Например, дисперсия шума квантования выходной последовательности ДПФ $X(jk)$ $E(jk) = X_{кв}(jk) - X(jk)$ определяется как

$$D[E(jk)] = M[|E(jk)|^2] = (N/3)2^{-2q_R},$$

где q_R – число сохраняемых разрядов произведений. Среднеквадратичное значение этой погрешности $\sigma_E = \sqrt{(N/3)2^{-q_R}}$.

При делении $X(jk)$ на N дисперсию погрешности D_E также нужно поделить на N .

Более подробное рассмотрение вопросов оценки и обеспечения точности ДПФ и ЦФ на его основе выходит за рамки данного учебного пособия.

5.6. АЛГОРИТМ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ

5.6.1. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ОБЩАЯ СТРУКТУРА НЕРЕКУРСИВНОГО ФИЛЬТРА НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ

НФ на основе частотной выборки – это еще один возможный способ или алгоритм вычисления дискретной временной свертки (ДВС)

$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$. Импульсная характеристика здесь в соответствии с

ОДПФ выражается через дискретизированную с шагом $\Delta\omega = \omega_d/N$ ЧХ фильтра $H(j\omega_k)$ (ДЧХ):

$$h(n) = \text{ОДПФ}_N[H(j\omega_k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(j\omega_k) e^{j\omega_k n T_d} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(j\omega_k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn},$$

где $\omega_k = k \frac{\omega_d}{N}$. Это соотношение подставляется в выражение для передаточ-

ной функции НФ $H(z) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{-m}$. В результате математических преоб-

разований получается основополагающее для данного алгоритма **выражение передаточной функции НФ через его ДЧХ:**

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(j\omega_k) \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} kn} z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(j\omega_k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} k} z^{-1}}.$$

С учетом обозначений $H_H(z) = 1 - z^{-N}$, $H'_{pk}(z) = \frac{1}{1 - e^{j\omega_k T_D} z^{-1}}$,

$H_{pk}(z) = H'_{pk}(z)H(j\omega_k)/N$ оно принимает вид

$$H(z) = H_H(z) \sum_{k=0}^{N-1} H_{pk}(z) = H_H(z) H_p(z). \quad (5.7)$$

Выражению (5.7) соответствует структура НФ на основе частотной выборки в виде последовательного соединения нерекурсивной части с передаточной функцией $H_H(z)$ и N параллельно включенных рекурсивных звеньев первого порядка с передаточными функциями $H'_{pk}(z)$ и весовыми коэффициентами $H(j\omega_k)/N$, которые определяются выборками ДЧХ (рис. 5.12).

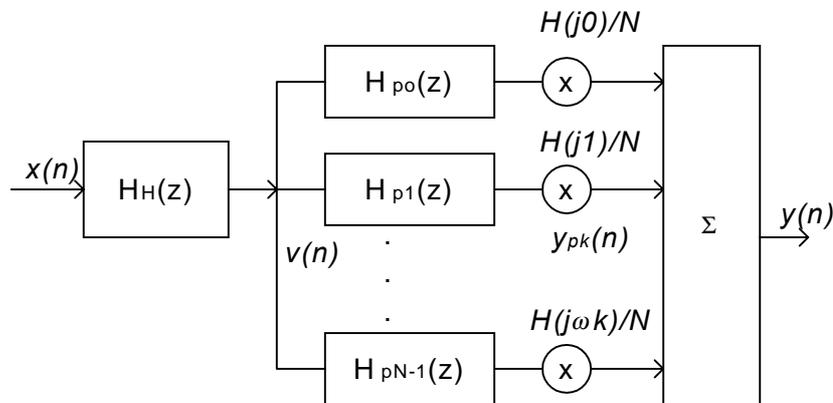
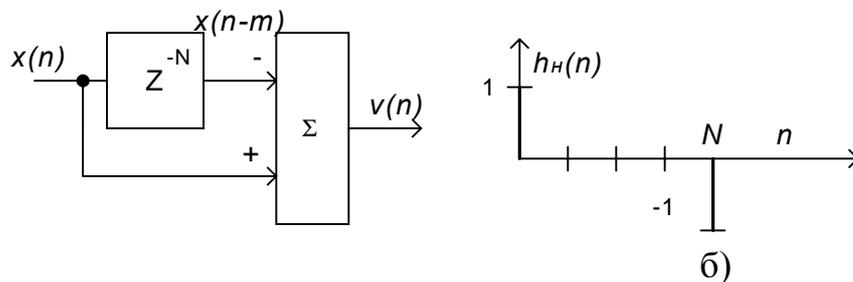


Рис. 5.12. Структурная схема НФ на основе частотной выборки

5.6.2. ОПИСАНИЕ НЕРЕКУРСИВНОЙ ЧАСТИ ФИЛЬТРА

Передаточной функции нерекурсивной части фильтра $H_H(z) = 1 - z^{-N}$ отвечает разностное уравнение $v(n) = x(n) - x(n - N)$ и структура, приведенная на рис. 5.13, а.



а)

б)

Рис. 5.13. Структура (а) и импульсная характеристика (б) нерекурсивной части фильтра

По отклику на единичный импульс $u_o(n)$ находится импульсная характеристика нерекурсивной части фильтра $h_n(n)=1$ при $n=0$ и $h_n(n)=-1$ при $n=N$ (рис.5.13, б), а решением уравнения N -го порядка $1-z^{-N}=0$ определяются

ее нули $z_{ok} = \sqrt[N]{1} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$, $k=0, 1, \dots, N-1$, которые равномерно расположены на окружности единичного радиуса (рис. 5.14).

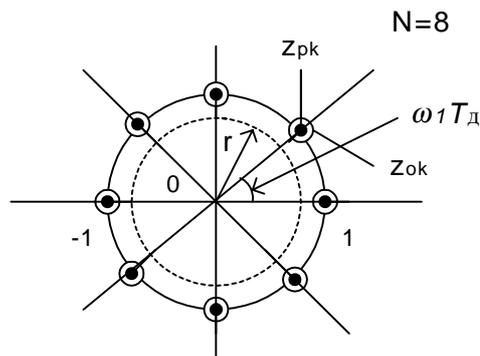


Рис. 5.14. Расположение нулей и полюсов на Z -плоскости

Частотная характеристика этой части фильтра следует из ее передаточной функции:

$$H_n(j\omega) = H_n(z)|_{z=e^{j\omega T_d}} = 1 - e^{-j\omega N T_d} = e^{-j\omega N T_d / 2} [2j \sin(\omega N T_d / 2)] =$$

$$= e^{-j(\omega - \omega_k) N T_d / 2} [2j \sin(\omega - \omega_k) N T_d / 2] .$$

Модуль ЧХ $|H_n(j\omega)| = 2|\sin(\omega N T_d / 2)|$ при $\omega = \omega_k$ равен нулю, при $\omega = 1,5\omega_k$ равен 2 и соответствует ЧХ гребенчатого фильтра (рис. 5.15, а).

5.6.3. ОПИСАНИЕ РЕКУРСИВНОЙ ЧАСТИ ФИЛЬТРА

Структурная схема рекурсивных звеньев представлена на рис. 5.16. Полюса звеньев (корни знаменателя передаточной функции) $z_{pk} = e^{j(2\pi/N)k} = z_{ok}$ также равномерно расположены на единичной окружности (см. рис.5.14). Они компенсируются нулями нерекурсивной части, что математически обеспечивает устойчивость фильтра и конечность его импульсной характеристики. Звенья описываются разностным уравнением $y'_{pk}(n) = v(n) + e^{j\omega_k T_d} y'_{pk}(n-1) = v(n) - a_{1k} y'_{pk}(n-1)$, $a_{1k} = -z_{pk}$ и импульсной характеристикой $h'_{pk} = e^{j\omega_k n T_d}$, определяемой по разностному уравнению при $v(n) = u_o(n)$. Она представляет собой комплексное гармоническое колебание с частотой ω_k .

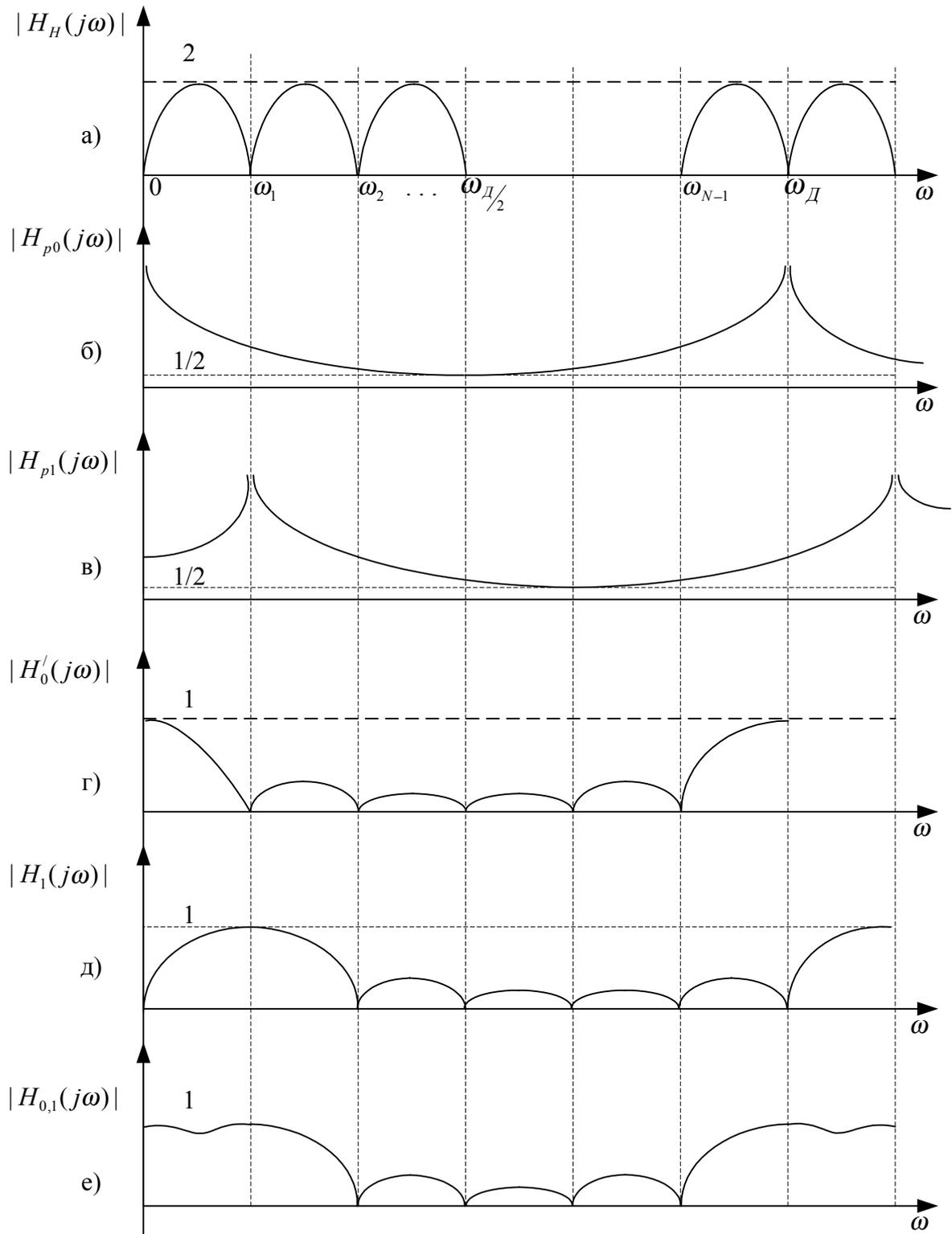


Рис. 5.15. Частотные характеристики фильтра на основе ЧВ: нерекурсивной части (а), рекурсивных звеньев $k=0, k=1$ (б, в), отдельных (г, д) и объединенных (е) каналов $k=0, k=1$

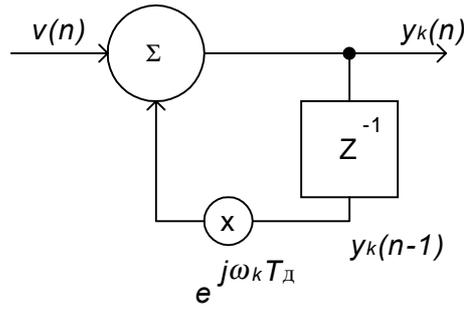


Рис. 5.16. Структура рекурсивных звеньев фильтра

Передаточной функции $H'_{pk}(z)$ соответствуют частотные характеристики звеньев:

$$\begin{aligned} H'_{pk}(j\omega) &= H'_{pk}(z)|_{z=e^{j\omega T_d}} = 1/(1 - e^{j\omega_k T_d} e^{-j\omega T_d}) = \\ &= e^{j(\omega - \omega_k)T_d/2} / [2j \sin(\omega - \omega_k)T_d/2]. \end{aligned}$$

Модуль их определяет АЧХ звеньев: $|H'_{pk}| = 1/[2|\sin(\omega - \omega_k)T_d/2|]$. Для звеньев с номерами $k=0, 1$ они приведены на рис. 5.15, б, в. Фильтр с такой АЧХ называют идеальным комплексным цифровым резонатором.

5.6.4. РЕЗУЛЬТИРУЮЩАЯ ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА И РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ ФИЛЬТРА

Результирующая частотная характеристика нерекурсивной и рекурсивной частей фильтра представляются выражением

$$H(j\omega) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2} T_d} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(j\omega_k)}{N} \frac{\sin(\omega - \omega_k)NT_d/2}{\sin(\omega - \omega_k)T_d/2} e^{j\omega_k \frac{N-1}{2} T_d}.$$

Дискретизированную частотную характеристику $H(j\omega_k)$ можно выразить через ее АЧХ $|H(j\omega_k)|$ и ФЧХ $\theta(\omega_k) = \theta_k$: $H(j\omega_k) = |H(j\omega_k)| e^{j\theta_k}$. Для фильтра с линейной ФЧХ $\theta_k = -\omega_k \frac{N-1}{2} T_d$ и выражение для ЧХ фильтра преобразуется к виду

$$H(j\omega) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2} T_d} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|H(j\omega_k)|}{N} \frac{\sin(\omega - \omega_k)NT_d/2}{\sin(\omega - \omega_k)T_d/2}.$$

На рис. 5.15, г, д показаны отдельные АЧХ для каналов $k=0$ и $k=1$:

$|H_0(j\omega)| = |H_N(j\omega)| |H'_{p0}(j\omega)|$, $|H_1(j\omega)| = |H_N(j\omega)| |H'_{p1}(j\omega)|$ и их результирующая АЧХ $|H_{0,1}(j\omega)|$ (рис. 5.15, е) при $|H(j\omega_0)| = |H(j\omega_1)| = 1$.

Так, фильтру с одним рекурсивным звеном при $k = 0$ соответствует передаточная функция

$$H(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \quad \text{и} \quad \text{ЧХ} \quad H(j\omega) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2} T_d} \frac{\sin \omega N T_d / 2}{\sin \omega T_d / 2}. \quad \text{Фильтр имеет}$$

прямоугольную импульсную характеристику $h(n) = 1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$, описывается разностным уравнением $y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(n-m)$ и известен как цифровой

фильтр скользящего среднего. При реализации фильтра на основе частотной выборки обработка осуществляется в соответствии с алгоритмом

$y(n) = x(n) - x(n-N) + y(n-1)$. Такой алгоритм требует двух операций сложения вместо N при прямом вычислении ДВС.

Аналогичным образом формируются АЧХ и при любом другом сочетании каналов фильтра и их весовых коэффициентов $|H(j\omega_k)|$, соответствующих отсчетам ДЧХ. На частотах ω_k полос задерживания ЧХ весовые коэффициенты фильтра $H(j\omega_k)$ имеют нулевые значения и необходимость в соответствующих им рекурсивных звеньях $H'_{pk}(z)$ в структуре фильтра, очевидно, отсутствует (см. синтез НФ методом частотной выборки). Фильтр содержит только звенья с весовыми коэффициентами $H(j\omega_k)$, не равными нулю. Это означает, что алгоритм на основе частотной выборки эффективен прежде всего для реализации узкополосных ЦФ с малым числом ненулевых выборок ДЧХ.

Например, можно достаточно просто реализовать узкополосные ФНЧ, импульсные характеристики которых соответствуют весовым функциям Хэмминга, Блэкмана, а также избирательные полосовые и заграждающие фильтры, настроенные на частоты выборок ω_k .

Общее разностное уравнение фильтра на основе частотной выборки можно записать в виде

$$v(n) = x(n) - x(n-N); \quad y'_{pk}(n) = v(n) - a_{1k} y'_{pk}(n-1);$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} y'_{pk}(n) H(j\omega_k) / N.$$

Однако обработка сигнала в соответствии с данным разностным уравнением осложняется комплексным характером коэффициентов a_{1k} и $H(j\omega_k)$.

5.6.5. ОПИСАНИЕ И СТРУКТУРА ФИЛЬТРА С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Коэффициенты рекурсивных звеньев фильтра $a_{1k} = -e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ и $a_{1(N-k)} = -e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)}$ являются комплексно-сопряженными $a_{1k} = a_{1(N-k)}^*$, а дискретизированные АЧХ и ФЧХ фильтра обладают свойством соответственно четной и нечетной симметрии: $|H(k)| = |H(N-k)|$, $\theta_k = -\theta_{(N-k)}$. Это позволяет преобразовать передаточную функцию рекурсивной части фильтра к форме, содержащей только вещественные коэффициенты:

$$H_p(z) = \sum_{k=0}^{(N-1)/2} \frac{|H(j\omega_k)|}{N} \left[\frac{e^{j\theta(k)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} \cdot z^{-1}} + \frac{e^{-j\theta(k)}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \cdot z^{-1}} \right] + \frac{H(0)}{N(1 - z^{-1})} =$$

$$= \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{2|H(j\omega_k)| \cos \theta_k - \cos(\theta_k - 2\pi k / N) z^{-1}}{N(1 - 2\cos(2\pi k / N) z^{-1} + z^{-2})} + \frac{H(0)}{N(1 - z^{-1})}.$$

Данному выражению соответствует структурная схема из $(N-1)/2$ параллельно включенных звеньев второго порядка с весовыми коэффициентами $2|H(j\omega_k)|/N$ и одного звена первого порядка с весовым коэффициентом $|H(0)|/N$ (рис. 5.17).

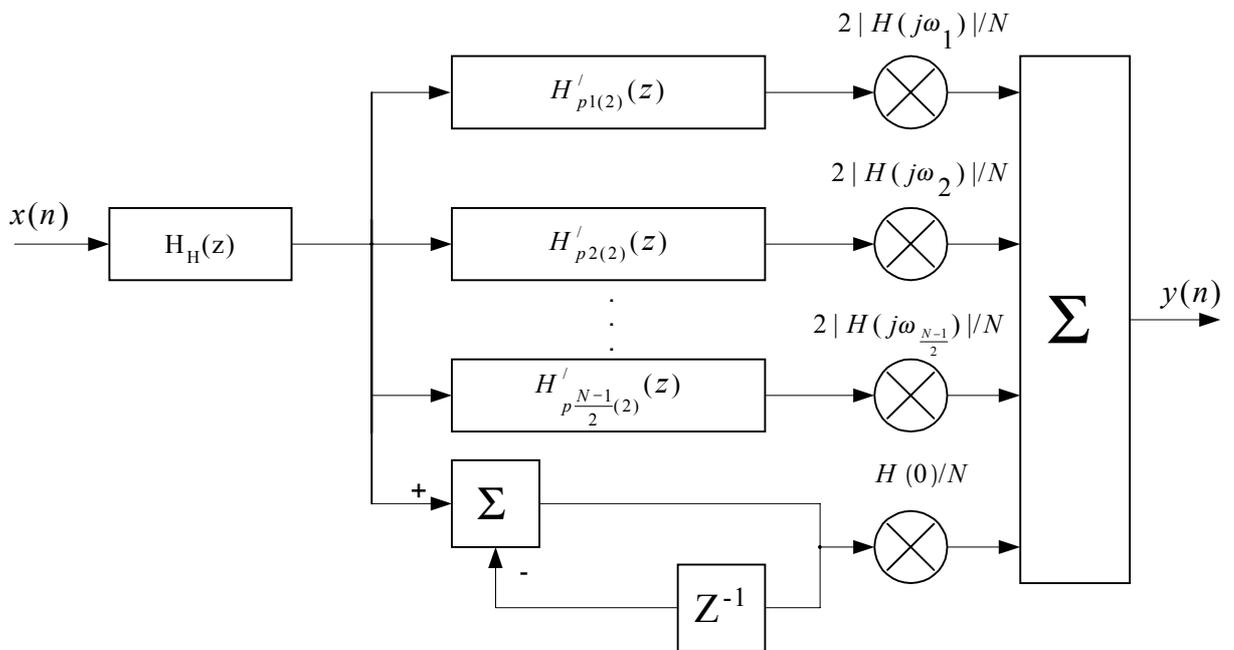


Рис. 5.17. Структурная схема НФ на основе частотной выборки с вещественными коэффициентами

Передаточная функция k -го звена второго порядка имеет вид

$$H'_{pk(2)}(z) = \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}},$$

где $b_{0k} = \cos \theta_k$; $b_{1k} = -\cos(\theta_k - 2\pi k / N)$; $a_{1k} = -2\cos(2\pi k / N)$; $a_{2k} = 1$.

В случае линейной ФЧХ

$$\theta_k = -\omega_k \frac{N-1}{2} T_d = -\frac{2\pi}{N} k \frac{N-1}{2}; \quad b_{0k} = (-1)^k \cos(2\pi k / N); \quad b_{1k} = -b_{0k}.$$

Структурная схема звена второго порядка в канонической форме приведена на рис. 5.18.

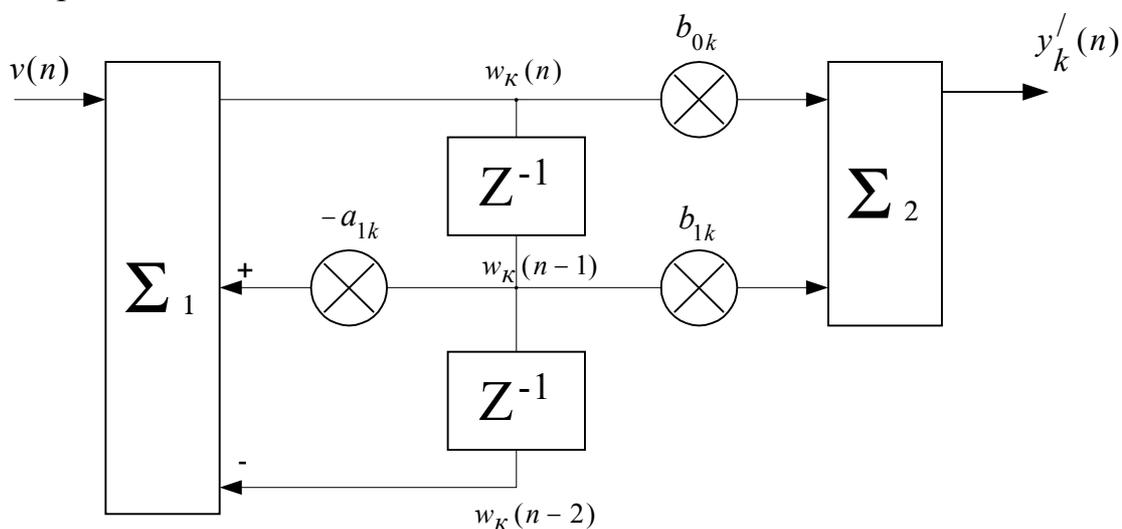


Рис. 5.18. Структурная схема рекурсивного звена второго порядка

Его разностное уравнение:

$$w_k(n) = v(n) - a_{1k}w_k(n-1) - w_k(n-2);$$

$$y'_k(n) = b_{0k}w_k(n) + b_{1k}w_k(n-1).$$

Для звена первого порядка разностное уравнение имеет вид

$$y'_o(n) = v(n) + y'_o(n-1).$$

Общее разностное уравнение рекурсивной части фильтра

$$y(n) = \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{2|H(j\omega_k)|}{N} y'_k(n) + \frac{H(0)}{N} y'_o(n).$$

Совместно с разностными уравнениями звеньев и разностным уравнением нерекурсивной части $v(n) = x(n) - x(n-N)$ оно определяет алгоритм обработки данного фильтра.

Приведенная выше передаточная функция записана для нечетного N . При четном N она преобразуется к виду

$$H_p(z) = \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{2|H(j\omega_k)|}{N} H'_{pk(2)}(z) + \frac{|H(0)|}{N(1-z^{-1})} + \frac{|H(j\omega_{N/2})|}{N(1+z^{-1})}.$$

Последнее слагаемое в этом выражении у фильтров с линейной ФЧХ отсутствует, т. к. на частоте $\omega_{N/2} = \omega_d / 2$ модуль и аргумент их ЧХ равны нулю: $|H(j\omega_{N/2})| = 0$; $\theta_{N/2} = 0$.

5.6.6. НЕРЕКУРСИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ СО СМЕЩЕНИЕМ НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ ВНУТРЬ КРУГА ЕДИНИЧНОГО РАДИУСА

Ограничение разрядности коэффициентов рекурсивных звеньев при реализации НФ на основе частотной выборки изменяет положение его полюсов и порождает проблему устойчивости таких фильтров. Она разрешается путем незначительного смещения всех нулей и полюсов фильтра на окружность радиуса $r < 1$ (см. рис. 5.14): $z_{ok} = z_{pk} = r e^{j\omega_k T_d}$. В результате передаточные функции нерекурсивной части рекурсивных звеньев фильтра преобразуются к виду

$$H_H(z) = 1 - r^N z^{-N}; \quad H'_{pk}(z) = 1 / (1 - r e^{j\omega_k T_d} z^{-1}).$$

Передаточная функция рекурсивной части фильтра с вещественными коэффициентами в данном случае сохраняет свое первоначальное выражение, но с отличающимися значениями коэффициентов рекурсивных звеньев:

$$b_{0k} = \cos \theta_k; \quad b_{1k} = -\cos(\theta_k - 2\pi k / N); \quad a_{1k} = -2 \cos(2\pi k / N); \quad a_{2k} = 1.$$

Для звена первого порядка при $k = 0$ $b_{00} = 1$; $b_{10} = 0$; $a_{10} = -r$; $a_{20} = 0$.

В случае линейной ФЧХ фильтра $b_{0k} = (-1)^k \cos(\pi k / N)$; $b_{1k} = -r b_{0k}$.

Алгоритм обработки для ЦФ со смещенными внутрь круга единичного радиуса нулями и полюсами определяется разностными уравнениями:

$$v(n) = x(n) - b_H x(n - N) \quad (b_H = r^N);$$

$$y'_k(n) = b_{0k} v(n) + b_{1k} v(n - 1) - a_{1k} y'_k(n - 1) - a_{2k} y'_k(n - 2)$$

(при прямой форме реализации звеньев);

$$y(n) = \sum_{k=1}^{K_B} \frac{2|H(j\omega_k)|}{N} y'_k(n) + \frac{H(0)}{N} y'_0(n);$$

$K_B = (N - 1)/2$ – при нечетном N и $K_B = (N/2) - 1$ – при четном; для звена первого порядка

$$y'_0(n) = v(n) - a_{10} y'_0(n - 1) = v(n) - r y'_0(n - 1).$$

Смещение нулей и полюсов и ограничение разрядности коэффициентов фильтра при его реализации приводит к искажениям частотной характеристики. Их можно учесть, рассчитывая частотную характеристику фильтра по приведенной выше общей (реализационной) передаточной функции:

$$H(j\omega) = H_n(z)H_p(z)|_{z=e^{j\omega T_d}}.$$

К коэффициентам фильтра с ограниченной разрядностью (точностью) при этом относятся коэффициент b_N нерекурсивной части и коэффициенты b_{0k} , b_{1k} , a_{1k} , a_{2k} , $|H(j\omega_k)|$ рекурсивной части фильтра.

Масштабирование фильтра на основе частотной выборки осуществляются включением масштабного множителя на входе фильтра, который рассчитывается либо спектральным методом по его общей частотной характеристике, либо временным или статистическим методами по импульсной характеристике фильтра. Импульсная характеристика фильтра при этом находится по его отклику на единичный импульс в режиме моделирования.

Расчет шума квантования ЦФ на основе частотной выборки осуществляется с помощью шумовой эквивалентной схемы, получаемой путем замены всех источников шума квантования (входного сигнала и произведений) их шумовыми эквивалентами. Решение задач, связанных с оценкой и обеспечением точности ЦФ на основе частотной выборки, предлагается рассмотреть самостоятельно.

5.6.7. ГРАФ-СХЕМА АЛГОРИТМА ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ НФ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ

НФ на основе ЧВ может быть реализован программно в соответствии с граф-схемой алгоритма рис. 5.19.

Входными данными для нее являются длина ИХ N , число рекурсивных звеньев L , значения масштабного множителя m , коэффициента нерекурсивной части B_N , коэффициентов рекурсивных звеньев $B_0(J)$, $B_1(J)$, $A_1(J)$, $A_2(J)$, $J = 1, 2 \dots L$, весовых коэффициентов фильтра $H(J) = |H(j\omega_k)|$ и отсчетов вещественной входной последовательности $x(n)$. Текущий $x(n)$ и $(N - 1)$ предыдущих значений входного сигнала сохраняются в памяти в виде очереди $X(I)$ постоянной длины N .

Выходными данными программы являются отсчеты выходного сигнала $y(n)$, которым соответствует программная переменная Y .

Обработке сигнала предшествует обнуление сигнальной памяти фильтра, т. е. переменных $X(I)$, $W_1(J)$, $W_2(J)$; последние означают переменные $w_j(n-1)$, $w_j(n-2)$ в разностных уравнениях звеньев фильтра. Сигналы $w(n)$ и $v(n)$ обозначены на ГСА через W и V . Базовая операция фильтра включает также сдвиг сигнальной памяти рекурсивных звеньев: $w(n-2) = w(n-1)$; $w(n-1) = w(n)$.

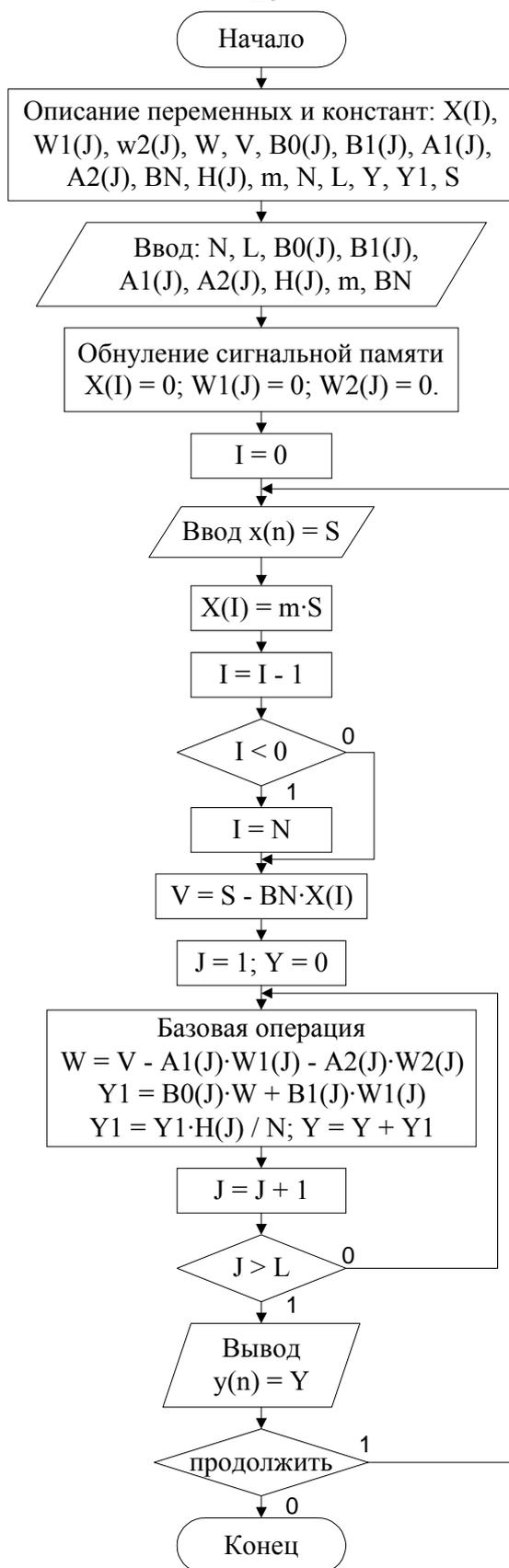


Рис. 5.19. Граф-схема алгоритма программной реализации НФ на основе ЧВ

Для звена первого порядка при $k = 0$ коэффициенты $B2(J) = A2(J) = 0$, коэффициент $B0(J) = 1$.

Эффективность НФ на основе ЧВ зависит от числа его рекурсивных звеньев.

Число операций умножения и сложения на один отсчет сигнала составляет в общем случае $K_{умн.} = 1 + 5L$ и $K_{слож.} = 1 + 4L$. Для реализации фильтра необходимо $N + 2L$ ячеек сигнальной памяти.

В качестве примера оценим реализационные характеристики для НФ, синтезированного методом частотной выборки в п. 3.4.4. Такой фильтр со смещением нулей и полюсов внутрь круга единичного радиуса содержит нерекурсивное звено, в котором выполняется одна операция умножения, и 11 рекурсивных звеньев второго порядка, в каждом из которых выполняются 4 операции умножения. К ним добавляются 2 операции умножения на нетривиальные значения ДЧХ H_l . Это соответствует общему числу операций умножения на отсчет сигнала, равному 47. Требуемый объем сигнальной памяти при числе отсчетов ДЧХ фильтра $N = 280$ составляет 335 ячеек. Как видим, фильтр имеет эффективность, более высокую, чем при реализации на основе БПФ и соизмеримую с эффективностью рекурсивного фильтра с аналогичными параметрами ЧХ (см. п. 3.2.8).

5.6.8. ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ НЕРЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ ВТОРОГО ТИПА

НФ второго типа (см. п. 3.4.2) получаются путем дискретизации ЧХ фильтра на частотах $\omega_k = [k + (1/2)]\omega_d / N$, $k = 1, 2, \dots, N - 1$.

Передаточная функция таких фильтров также находится Z-преобразованием ИХ фильтра, выраженной через его ДЧХ:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(j\omega_k) e^{j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{1}{2})n} \right] z^{-n} = (1 + z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(j\omega_k) / N}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{1}{2})} z^{-1}}$$

Исходя из данного соотношения по аналогии с вышерассмотренными НФ первого типа могут быть решены все вопросы, связанные с особенностями реализации НФ второго типа, которые выносятся на самостоятельную проработку.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каково определение ДПФ и условие выбора шага дискретизации по частоте при его вычислении?
2. Как проявляется во временной области дискретизация сигнала по частоте?
3. Как связано число вычисляемых точек ДПФ с длиной реализации сигнала?

5. Как проявляются дополнения сигнала нулевыми отсчетами во временной и частотной областях?
6. Как определяется ОДПФ? Каково число выходных отсчетов ОДПФ и их отличие от исходной последовательности?
7. Каким образом с помощью ДПФ вычисляются круговая и линейная свертки дискретных последовательностей?
8. По какому числу точек вычисляются ДПФ свертываемых последовательностей конечной длины и почему?
9. Как осуществляется фильтрация конечных последовательностей и последовательностей большой длины с помощью ДПФ?
10. Из каких условий выбирается длина секции при фильтрации последовательностей большой длины с помощью ДПФ?
11. Как определяется вычислительная эффективность алгоритма цифровой фильтрации на основе ДПФ и почему его называют алгоритмом быстрой свертки?
12. Как получается выражение для передаточной функции НФ на основе частотной выборки, определяющее его структурную схему?
13. Из каких звеньев состоит НФ на основе частотной выборки и как описываются они во временной и частотной областях?
14. Как математически описывается алгоритм цифровой фильтрации на основе частотной выборки?
15. Каково нуль-полосное представление НФ на основе частотной выборки?
16. От чего зависит число рекурсивных звеньев при практической реализации НФ на основе частотной выборки и в каких случаях целесообразно их применение?
17. Как осуществляется переход к рекурсивным звеньям второго порядка в алгоритме цифровой фильтрации на основе частотной выборки?
18. Почему НФ на основе частотной выборки может быть неустойчив и как обеспечивается устойчивость таких фильтров?
19. Как влияет смещение нулей и полюсов внутрь круга на частотную характеристику, структуру и алгоритм обработки ЦФ на основе частотной выборки?
20. Каков требуемый объем вычислений и памяти в алгоритме цифровой фильтрации на основе частотной выборки и зависит ли он от длины импульсной характеристики фильтра?
21. Какие методы синтеза НФ наиболее соответствуют их реализации на основе алгоритмов ДПФ и частотной выборки?
22. Почему ЦФ на основе частотной выборки, содержащий рекурсивные звенья, имеет конечную ИХ?

6. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И ПРИМЕНЕНИЯ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

6.1. ОБЩАЯ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Общей задаче цифровой фильтрации – целенаправленному изменению частотного спектра сигнала [17] – отвечают ЦФ, синтезируемые по заданной частотной характеристике рассмотренными в главе 3 методами.

В то же время существуют специальные ЦФ, параметры которых (а в некоторых случаях и структуры) определяются в соответствии с критериями решаемой ими прикладной задачи. К ним относятся перестраиваемые ЦФ, амплитудные и фазовые корректоры, комплексные или квадратурные ЦФ, сглаживающие, заграждающие, согласованные, дифференцирующие, интегрирующие и другие ЦФ [11, 13, 48, 52 – 54].

В данной главе приводятся примеры такого рода специальных задач и цифровых фильтров, которые имеют как самостоятельное значение, так и отражают в некоторой мере многообразие приложений цифровой фильтрации.

6.2. ПЕРЕСТРАИВАЕМЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ, АМПЛИТУДНЫЕ И ФАЗОВЫЕ КОРРЕКТОРЫ

К перестраиваемым относятся ЦФ с изменяемой (аппаратно или программно) частотной характеристикой. Перестройка ЦФ возможна изменением частоты дискретизации f_d и изменением значений его коэффициентов. Первый способ имеет технические ограничения и обеспечивает только масштабную перестройку фильтра (см. параграф 2.5). Вторым способом является более универсальным. Им реализуются такие виды перестройки, как масштабная, полосовая, полная, со сменой типа ЧХ. Способ основывается на установлении однозначной связи коэффициентов фильтра с параметрами его ЧХ – частотами среза, полосой пропускания, центральной частотой, добротностью и др. Перестройка изменением коэффициентов фильтра обеспечивает независимое управление параметрами ЧХ, осуществляемое либо дискретно путем смены коэффициентов из сохраняемого в памяти их набора, либо непрерывно, путем непосредственного вычисления новых значений коэффициентов арифметическим устройством фильтра или системным контроллером.

В качестве перестраиваемых ЦФ различного типа (ФНЧ, ФВЧ, ППФ, ПЗФ) широко используют рекурсивные звенья 2-го и 4-го порядка и многозвенные фильтры на их основе. Они применяются в многоканальных устройствах приема и передачи сигналов, в многоканальных полосовых анализаторах спектра, в следящих системах и системах управления. Перестраиваемый рекурсивный фильтр заданного типа может быть синтезирован с помощью обобщенного билинейного преобразования передаточной функции нормализованного аналогового ФНЧ-прототипа (см. параграф 3.2). Получаемая с помощью замены оператора $p = f_{об}(z)$ передаточная функция ЦФ

$H(z) = H(p)|_{p=f_{\sigma\delta}(z)}$ зависит как от коэффициентов передаточной функции АФПНЧ (или его нулей и полюсов), так и от приведенных в табл. 3.1 коэффициентов преобразующих функций α и β , которые непосредственно связаны с перестраиваемыми параметрами ЧХ фильтра.

Так, для перестраиваемых цифровых ФНЧ и ФВЧ коэффициент α определяется их частотой среза $\lambda_c = \omega_c T_D$: $\alpha = ctg\lambda_c / 2$ и $\alpha = tg\lambda_c / 2$; для ППФ и ПЗФ коэффициенты α и β являются функциями центральной частоты λ_0 и полосы пропускания $\Delta\lambda = \lambda_{c2} - \lambda_{c1}$: $\alpha = ctg\Delta\lambda/2$ (ППФ), $\alpha = tg\Delta\lambda/2$ (ПЗФ), $\beta = \cos[(\lambda_{c2} + \lambda_{c1})/2] / \cos\Delta\lambda/2 = \cos\lambda_0$ (для ППФ и ПЗФ). Путем дополнительного преобразования передаточной функции перестраиваемого ЦФ $H(z)$ она приводится к виду, необходимому для взаимно независимой регулировки параметров ЧХ. Полученные таким образом передаточные функции перестраиваемых рекурсивных звеньев ФНЧ, ФВЧ, ППФ и ПЗФ приведены в [48, 52].

Например, передаточная функция звена перестраиваемого полосового фильтра 2-го порядка может быть найдена путем преобразования передаточной функции нормализованного аналогового ФНЧ первого порядка $H(p) = 1/(p+1)$:

$$\begin{aligned} H(z) = H(p)|_{p=f_{\sigma\delta}(z)} &= [(1 - z^{-2})/\alpha] / [\alpha^{-1} + 1 - 2\beta z^{-1} + (1 - \alpha^{-1}) z^{-2}] = \\ &= k(1 - A)(1 - z^{-2}) / [1 - (1 + A)B z^{-1} + A z^{-2}]. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Коэффициенты ее $B = \beta = \cos\lambda_0$ и $A = (\alpha - 1)/(\alpha + 1) = (tg\Delta\lambda/2 - 1)/(tg\Delta\lambda/2 + 1)$ раздельно определяют центральную частоту λ_0 и полосу пропускания $\Delta\lambda$ ЦФ, обеспечивая независимое управление обоими параметрами ЧХ. Одновременное изменение параметров λ_0 , $\Delta\lambda$ позволяет также управлять добротностью фильтра $Q = \lambda_0/\Delta\lambda$. Коэффициент $k = 0,5$ является масштабирующим.

На основе перестраиваемых полосовых звеньев строятся банки равнополосных ($\Delta\lambda = const$) или равнодобротных ($Q = const$) ЦФ для полосового спектрального анализа сигналов [54].

К перестраиваемым фильтрам специального назначения относятся также амплитудные (АК) и фазовые (ФК) корректоры. Они имеют управляемую ЧХ всепропускающего фильтра и используются для компенсации искажений АЧХ и ФЧХ линейных трактов, например, каналов связи, цепей управления и др. [13]. Синтез цифровых перестраиваемых АК и ФК основывается на преобразовании передаточной функции аналоговых АК и ФК с помощью преобразующей функции $p = f_{\sigma\delta}(z)$, используемой для синтеза ППФ (см. табл. 3.1). При этом граничные частоты полосы пропускания λ_{c2} , λ_{c1} и центральная частота $\lambda_0 = (\lambda_{c2} \lambda_{c1})^{1/2}$ цифрового ФК соответствуют частотам, на которых ФЧХ принимает значения, соответственно, $(-\pi/4)M$, $(-3\pi/4)M$ и $(-\pi/2)M$, где M – порядок цифрового корректора. Для АК центральной частоте $\lambda_0 = (\lambda_{c2} \lambda_{c1})^{1/2}$ соответствует минимум АЧХ, а граничным частотам λ_{c2} , λ_{c1} – уровень, определяемый коэффициентом глубины коррекции $h = 0 \pm 1$.

Корректирующие аналоговые звенья первого порядка (фазовые и амплитудные) описываются передаточными функциями вида:

$$H_{\phi}(p) = k(p - c)/(p + c); \quad H_a(p) = k(p - c h)/(p + c).$$

Их коэффициенты k (масштабирующие) и c (нули и полюсы) рассчитываются хорошо разработанными методами синтеза аналоговых корректоров [55]. Путем замены оператора $p = f_{o\phi}(z)$ и дополнительного преобразования передаточная функция аналогового прототипа приводится к одной из возможных передаточных функций цифрового ФК и АК второго порядка [48]:

$$H_{\phi k}(z^{-1}) = k_{\phi} \frac{2A - 1 - 2ABz^{-1} + z^{-2}}{1 - 2ABz^{-1} + (2A - 1)z^{-2}};$$

$$H_{ak}(z^{-1}) = k_a \frac{A(1 - h) + h - 2ABz^{-1} + [A(1 + h) - h]z^{-2}}{1 - 2ABz^{-1} + (2A - 1)z^{-2}}.$$

Коэффициент $B = \cos \lambda_0$ передаточных функций ФК и АК управляет центральной частотой λ_0 полосы коррекции ФЧХ и АЧХ, коэффициент $A = \alpha / (\alpha + c)$ регулирует полосу коррекции $\Delta \lambda$, а коэффициенты k_a и k_{ϕ} являются масштабирующими.

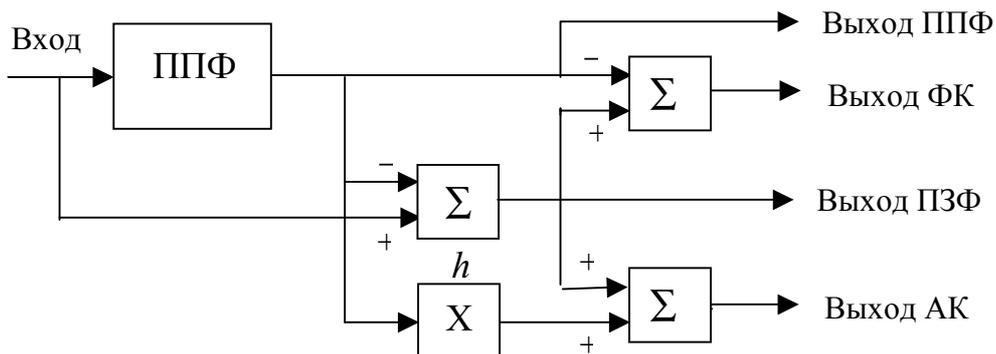
Для систем спектрального анализа и многоканального приема и передачи сигналов представляют интерес универсальные цифровые звенья, обеспечивающие наряду с перестройкой параметров также и смену вида фильтра или корректора. Их реализация основывается на соотношениях между передаточными функциями ЦФ различного вида, таких как:

$$H_{\phi_{вч}}(z^{-1}) = 1 - H_{\phi_{нч}}(z^{-1}); \quad H_{nz\phi}(z^{-1}) = 1 - H_{nn\phi}(z^{-1});$$

$$H_{\phi k}(z^{-1}) = H_{nz\phi}(z^{-1}) - H_{nn\phi}(z^{-1}); \quad H_{ak}(z^{-1}) = H_{nz\phi}(z^{-1}) + h H_{nn\phi}(z^{-1}).$$

Так, три последних соотношения позволяют создать универсальное звено на базе перестраиваемого ППФ с отдельными выходами ППФ, ПЗФ, АК и ФК и общим входом (рис. 6.1, а), или звено с отдельными входами ППФ, ПЗФ, ФК и АК и общим выходом (рис. 6.1, б) [48].

Другие схемы звеньев фильтров и корректоров можно найти в [48]. Рекомендуется на основе приведенных в данном параграфе передаточных функций самостоятельно составить разностные уравнения и структурные схемы соответствующих им перестраиваемых ЦФ и цифровых корректоров.



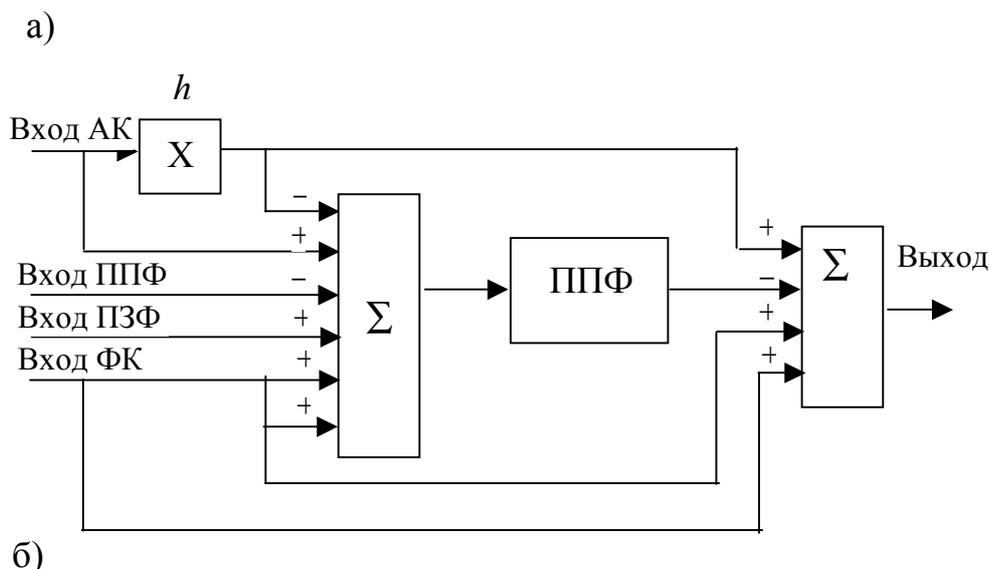


Рис. 6.1. Структурные схемы универсального звена на базе ППФ с многомерным выходом (а) и многомерным входом (б)

6.3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Наряду с одномерной цифровой обработкой сигналов в системах ЦОС широко применяется также квадратурная обработка комплексных дискретных сигналов. К комплексному сигналу приводит, например, операция цифрового гетеродина, т. е. смещения спектра вещественного сигнала $x(n)$ на частоту ω_r (частоту гетеродина), осуществляемого его умножением на комплексный гармонический сигнал $x_r(n) = e^{j\omega_r n T_d}$: $y(n) = x(n)x_r(n) = x(n)e^{j\omega_r n T_d}$. Знаку (+) при этом соответствует смещение спектра вправо: $Y(j\omega) = X[j(\omega - \omega_r)]$, знаку (-) – влево: $Y(j\omega) = X[j(\omega + \omega_r)]$ (в том числе и в область отрицательных частот). Комплексными могут быть также сигналы с одной боковой полосой спектра [1, 2]. Отличительной особенностью спектров комплексных сигналов от вещественных является их несимметрия относительно нулевой частоты. Диапазон смещения спектров дискретных сигналов по сравнению с аналоговыми ограничен пределами $\pm\omega_d/2$.

Квадратурная обработка комплексных сигналов возможна как с помощью ЦФ с вещественными коэффициентами (раздельно обрабатывающих их реальную и мнимую составляющие), так и ЦФ с комплексными весовыми коэффициентами, которые называют также комплексными ЦФ [1, 48]. Достоинством их является симметричность АЧХ относительно центральной частоты, важная для сложных и модулированных сигналов, а также дополнительные возможности по перестройке таких фильтров.

Возможны различные способы получения передаточной функции комплексного ЦФ. Комплексный **нерекурсивный фильтр** можно получить умножением вещественной импульсной характеристики фильтра-прототипа на комплексную экспоненту $\exp(\pm j\lambda_0 n)$. Для **рекурсивных фильтров** это можно

сделать по передаточной функции цифрового рекурсивного фильтра-прототипа с вещественными коэффициентами путем исключения его комплексно-сопряженных нулей и полюсов и, при необходимости, последующего вращения оставшихся нулей и полюсов на угол λ_0 . В другом способе [48] переменные z^{-l} , z^{-k} передаточной функции вещественного РФ-прототипа заменяются выражениями $z^{-l} \exp(\pm j \omega_{сд} l T_d)$ и $z^{-k} \exp(\pm j \omega_{сд} k T_d)$, где $\omega_{сд}$ – частота сдвига АЧХ и ФЧХ фильтра. Например, передаточная функция (6.1) перестраиваемого рекурсивного звена ППФ преобразуется в результате в передаточную функцию комплексного РФ вида:

$$H(z, j) = k(1 - A)[1 - (c_2 + js_2) z^{-2}] / [1 - (1 + A)B (c_1 + js_1) z^{-1} + A (c_2 + js_2) z^{-2}],$$

где $c_1 = \cos \omega_{сд} T_d$, $c_2 = \cos \omega_{сд} 2T_d$, $s_1 = \sin \omega_{сд} T_d$, $s_2 = \sin \omega_{сд} 2T_d$ – комплексные коэффициенты фильтра. Изменением частоты сдвига $\omega_{сд}$ можно смещать частотную характеристику фильтра **без взаимного сдвига** ее точек. При равенстве $\omega_{сд}$ исходной центральной частоте фильтра ω_0 , определяемой коэффициентом B , частотная характеристика комплексного полосового фильтра преобразуется в частотную характеристику комплексного ФНЧ. Аналогичным образом по приведенным в параграфе 6.2 передаточным функциям амплитудного и фазового корректоров можно получить передаточные функции комплексных АК и ФК.

Комплексный РФ можно синтезировать также методом билинейного преобразования по комплексному аналоговому ФНЧ-прототипу с помощью преобразующих функций табл. 3.1. Например, передаточной функции комплексного аналогового фильтра первого порядка $H(p, j) = 1/(p + c + js)$ соответствует при этом передаточная функция комплексного цифрового ФНЧ следующего вида:

$$H(z, j) = \frac{1 + z^{-1}}{\alpha^{-1} - c - js - (\alpha^{-1} + c + js) z^{-1}}.$$

Такой фильтр имеет вещественный нуль $z_0 = -1$ и комплексный полюс $z_p = r_p e^{j\lambda p}$. При $z_0 = 0$ его называют **комплексным однополюсным резонатором** (рис. 6.2) [1, 2]. Ему отвечают передаточная функция $H(z, j) = 1/(1 + a_1 z^{-1})$, где $a_1 = -z_p = a_{1R} + ja_{1I}$, импульсная характеристика $h(n) = r_p^n e^{j\lambda p n}$, разностное уравнение $y(n) = x(n) - a_1 y(n-1) = y_{Re}(n) + jy_{Im}(n)$

и АЧХ: $|H(j\lambda)| = 1/|1 - r_p e^{-j(\lambda - \lambda p)}| = 1/[1 - 2 r_p \cos(\lambda - \lambda p) + r_p^2]$.

При $\lambda = \lambda p$ $|H(j\lambda p)|_{max} = 1/(1 - r_p)$.

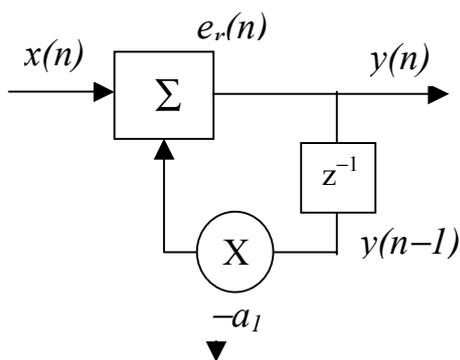


Рис. 6.2. Структурная схема комплексного однополюсного резонатора

Следует обратить внимание на симметрию АЧХ фильтра относительно частоты λ_0 .

Полагая сигнал $x(n) = x_{Re}(n) + jx_{Im}(n)$ также комплексным, запишем разностные уравнения отдельно для реальной и мнимой составляющих выходного сигнала:

$$y_{Re}(n) = x_{Re}(n) - a_{IR} y_{Re}(n-1) + a_{II} y_{Im}(n-1);$$

$$y_{Im}(n) = x_{Im}(n) - a_{II} y_{Re}(n-1) + a_{IR} y_{Im}(n-1),$$

где $a_{IR} = -r_p \cos \lambda p$, $a_{II} = -r_p \sin \lambda p$.

Этим уравнениям соответствует реализационная структура звена, в которой все операции выполняются с вещественными числами (рис. 6.3).

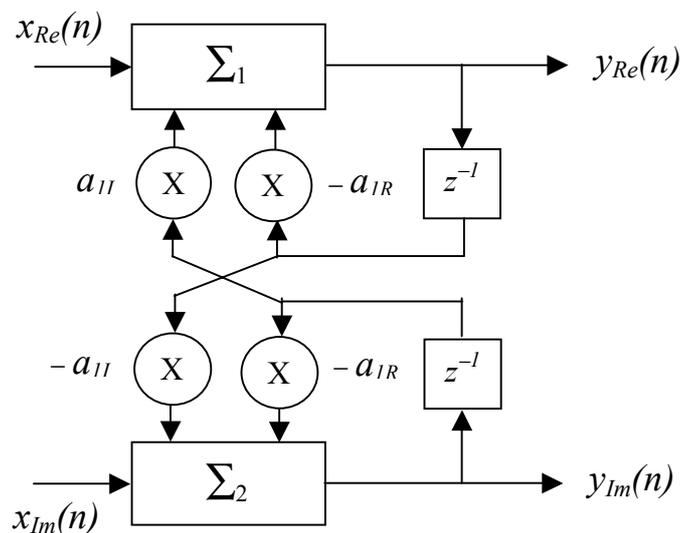


Рис. 6.3. Развернутая структурная схема комплексного однополюсного резонатора

Комплексное однополосное звено является базовым при построении комплексных ЦФ высокого порядка.

При $r_p = 1$ звено превращается в генератор незатухающего комплексного гармонического сигнала $y(n) = \cos \lambda p n + j \sin \lambda p n$ (синус – косинусный генератор) [15, 56]. Для его внешнего возбуждения достаточно на вход реальной составляющей подать единичный импульс $x_{Re}(n) = 1$ при $n = 0$. Возможно также самовозбуждение звена при задании следующих начальных условий разностного уравнения: $y_{Re}(-1) = 1, y_{Im}(-1) = 0$.

Особенностью данного цифрового генератора является нарастание шума квантования на его выходе, вызываемого конечной разрядностью умножителя q_r (процессора ЦОС). Шуму квантования умножителя $e_r(n)$, условно показанному на рис. 6.2, с дисперсией $\sigma_e^2 = 2^{-2q_r} / 12$ соответствует дисперсия шума квантования на выходе звена, определяемая квадратом модуля его импульсной характеристики $h(n) = \exp(j \lambda p n)$:

$$\sigma_{e_{вых}}^2 = (2^{-2q_r} / 12) \sum_{l=0}^n |h(l)|^2 = (2^{-2q_r} / 12) n.$$

Как видим, дисперсия шума возрастает пропорционально номеру отсчета n , а среднеквадратичное значение – пропорционально \sqrt{n} :

$$\sigma_{e_{вых}} = (2^{-q_r} / \sqrt{12}) \sqrt{n}.$$

Если задаться разрядностью умножителя q_r , допустимым среднеквадратичным значением выходного шума $\sigma_{e_{выхдоп}} = 2^{-q_y} / \sqrt{12}$, соответствующим разрядности выходного кода q_y , то можно найти номер отсчета n , при котором шум квантования достигнет допустимого значения. Так, при $q_r = 32$ бита, $q_y = 16$ бит, $n = 2^{32}$. При частоте дискретизации $f_d = 64000$ Гц это соответствует времени 2^{16} секунд. Через определяемые таким образом интервалы времени нужно принудительно возвращать генератор в исходное состояние. Во избежание нежелательных скачков сигнала это целесообразно делать в моменты перехода через нуль его синусоидальной составляющей [56].

6.4. СГЛАЖИВАЮЩИЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

К специализированным сглаживающим фильтрам, которые рассматриваются в данном параграфе, относятся рекурсивный фильтр экспоненциального весового усреднения, нерекурсивные фильтры на основе различных весовых функций – однородный, треугольный и другие, нерекурсивные фильтры на основе параболической аппроксимации, медианный фильтр. Они используются для подавления аддитивных ВЧ-составляющих, высших гармоник и шумов и выделения медленно изменяющейся полезной составляющей, например, на выходе цифрового или аналогового детектора или демодулятора.

6.4.1. РЕКУРСИВНЫЙ ФИЛЬТР ВЕСОВОГО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО УСРЕДНЕНИЯ

Рекурсивное звено первого порядка (рис. 6.4) с вещественными коэффициентами b_0 , a_1 , связанными соотношением: $b_0 = 1/\mu$, $a_1 = -(\mu - 1)/\mu = -1 + b_0$, в соответствии с его разностным уравнением

$$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1) = (1/\mu) x(n) + [(\mu - 1)/\mu] y(n-1)$$

реализует так называемый алгоритм экспоненциального весового усреднения или сглаживания [36, 53]. Параметром его является коэффициент сглаживания $\mu > 1$.

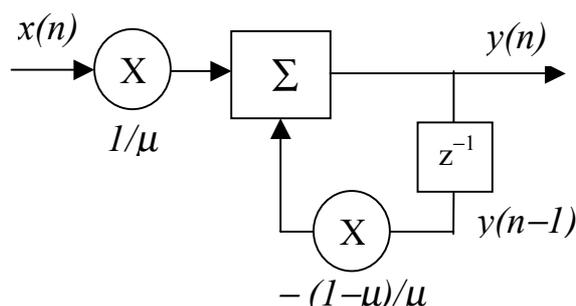


Рис. 6.4. Структурная схема сглаживающего рекурсивного звена

Если представить сигналы на входе и выходе звена в виде суммы их математического ожидания (МО) и случайной аддитивной помехи:

$x(n) = M[x(n)] + e_x(n)$, $y(n) = M[y(n)] + e_y(n)$, то в случае идеального сглаживающего фильтра выходной сигнал $y(n)$ должен являться несмещенной оценкой МО входного сигнала: $M[y(n)] = M[x(n)]$, а его дисперсия $D[y(n)] = D[e_y(n)]$ должна быть минимальной в соответствии с критерием минимума среднего квадрата ошибки (СКО). Используя разностное уравнение звена, можно найти связь между МО и дисперсией его выходного и входного сигналов:

$$M[y(n)] = (1/\mu) M[x(n)] + [(\mu - 1)/\mu] M[y(n-1)];$$

$$D[y(n)] = (1/\mu^2) D[x(n)] + [(\mu - 1)/\mu]^2 D[y(n-1)].$$

Как видим, в общем случае $M[y(n)] \neq M[x(n)]$, т. е. выходной сигнал является смещенной оценкой МО входного сигнала. Согласно [36] это смещение

при $n \leq \mu$ определяется выражением $M[y(n)] = M[x(n)][1 - (\mu - 1)^n/\mu^n]$ и составляет до 36,8 %. При $n \gg \mu$, т. е. в установившемся режиме, справедливы допущения: $M[y(n-1)] \approx M[y(n)]$, $D[y(n-1)] \approx D[y(n)]$, при которых $M[y(n)] \approx M[x(n)]$ – смещение оценки с ростом n стремится к нулю, а дисперсия ее: $D[y(n)] = D[x(n)]/(2\mu - 1)$ в $(2\mu - 1)$ раз меньше дисперсии входного сигнала (в том числе и при $n = \mu$ [36]. По эффективности, т. е. дисперсии, оценка экспоненциального сглаживания при $n = \mu$ почти в 2 раза лучше оценки линейного сглаживания, для которой $D[y(n)] = D[x(n)]/n$. Таким об-

разом, чем больше μ , тем меньше случайная погрешность оценки, но больше ее систематическая погрешность при значениях n , соизмеримых с μ , и медленнее ее убывание во времени, т. е. с ростом n . Физически это означает возрастание инерционности и ухудшение способности фильтра отслеживать изменения входного сигнала (множитель $1/\mu$ перед $x(n)$).

Отклик фильтра на единичный импульс при $n = 0, 1, \dots$ равен: $y(0) = 1/\mu$, $y(1) = (1/\mu)[(\mu - 1)/\mu]$, $y(2) = (1/\mu)[(\mu - 1)/\mu]^2$, что соответствует импульсной характеристике фильтра $h(n) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\mu - 1}{\mu} \right)^n$. При $\mu \geq (5 - 10)$ множитель $[(\mu - 1)/\mu]^n$ стремится к $e^{-n/\mu}$ и импульсная характеристика принимает вид экспоненциальной весовой функции $h(n) \approx \frac{1}{\mu} e^{-n/\mu}$. Это объясняет название данного фильтра и реализуемого им алгоритма экспоненциального усреднения или взвешивания.

Фильтр имеет вещественный полюс $r_p = (\mu - 1)/\mu < 1$ и описывается передаточной функцией и АЧХ вида:

$$H(z) = \frac{1/\mu}{1 - \frac{\mu - 1}{\mu} z^{-1}}; \quad |H(j\lambda)| = \frac{1}{|\mu - (\mu - 1)e^{-j\lambda}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\mu(\mu - 1)(1 - \cos \lambda)}}.$$

С ростом μ уменьшается полоса пропускания фильтра. Поэтому в следящих системах значение μ задают небольшим в режиме установления или захвата и увеличивают его в режиме слежения.

Предлагается самостоятельно построить и проанализировать графики АЧХ и импульсной характеристики фильтра.

6.4.2. НЕРЕКУРСИВНЫЕ СГЛАЖИВАЮЩИЕ ФИЛЬТРЫ НА ОСНОВЕ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

Нерекурсивный фильтр осуществляет линейное сглаживание сигнала в соответствии с алгоритмом весового усреднения: $y(n) = \frac{1}{U} \sum_{m=0}^{N-1} w(m)x(n - m)$,

где U – масштабирующий множитель, зависящий от вида весовой функции $w(m)$. Такой алгоритм обеспечивает несмещенную оценку входного сигнала: $M[y(n)] = M[x(n)]$. Прямоугольной весовой функции соответствует алгоритм

скользящего среднего $y(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(n - m)$ с минимальной (для белого шу-

ма) дисперсией оценки $D_y = D_x / N$. Такой фильтр называют **однородным** [40], так как все сглаживаемые отсчеты у него имеют одинаковые веса, рав-

ные единице. Его передаточная функция $H(z) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} z^{-m}$ может быть пре-

образована к виду $H(z) = \frac{1}{N} \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$, которому отвечает разностное

уравнение $y(n) = N^{-1}[x(n) - x(n-N) + y(n-1)]$ (см. п. 5.6.4). Структура реализуемого в соответствии с ним фильтра (рис. 6.5) содержит нерекурсивную и рекурсивную части и при больших N требует намного меньшего объема вычислений.

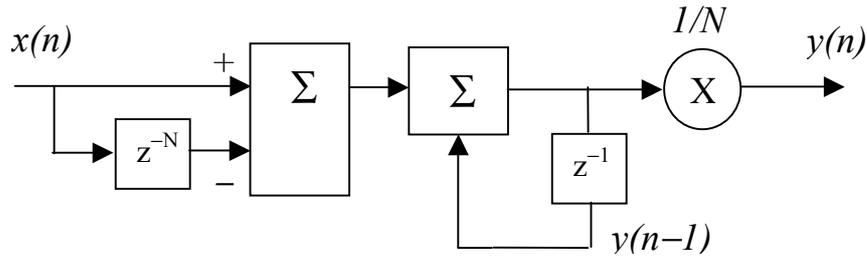


Рис. 6.5. Структурная схема сглаживающего рекурсивного звена

Однако в данном случае невозможно прореживание выходного сигнала в процессе обработки, предоставляемое алгоритмом на основе ДВС [11, 40]. Коэффициент прореживания для сглаживающих НФ на основе ДВС может достигать значения, равного N .

Другие весовые функции имеют более широкую по сравнению с прямоугольной шумовую полосу и менее эффективны относительно белого шума. Однако они лучше подавляют сосредоточенные или узкополосные помехи вне главного лепестка частотной характеристики весовой функции, определяющей частотную характеристику сглаживающего НФ (см. п.п. 3.3.3, 3.3.4). Важные для задач сглаживания параметры весовых функций приводятся в [11, 36, 58].

НФ с прямоугольной и треугольной весовыми функциями (последний фильтр называют еще **триангулярным**) применяют также в качестве фильтров-интерполяторов соответственно нулевого и первого порядка в восходящих дискретных системах, т. е. системах с повышением частоты дискретизации [11, 40]. В случае нулевого (или ступенчатого) интерполятора недостающие (нулевые) отсчеты входного сигнала на каждом интервале интерполяции T_d' замещается в выходном сигнале $(L-1)$ -м узловым значением входного сигнала на границе интервала интерполяции. Здесь $L = T_d' / T_d$ соответствует коэффициенту повышения частоты дискретизации и длине импульсной характеристики фильтра N . При интерполяции по линейному закону длина треугольной импульсной характеристики фильтра вдвое превышает коэффициент передискретизации сигнала L : $N = 2L$. Линейную интерполяцию сигнала можно выполнить также с помощью двух каскадно включенных интерполяторов нулевого порядка.

В качестве примера на рис. 6.6 показано применение сглаживающего однородного фильтра в устройстве обнаружения и оценки параметров гармонических сигналов [40].

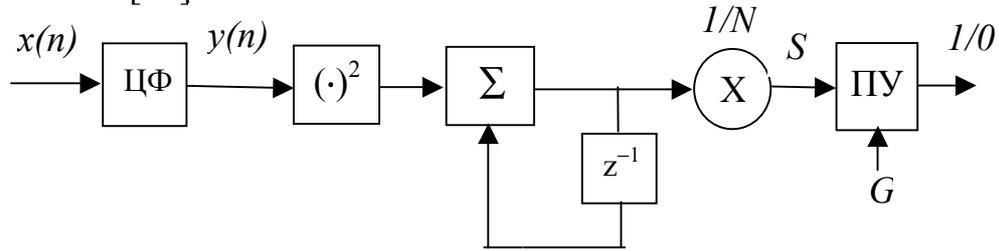


Рис. 6.6. Пример структурной схемы применения сглаживающего однородного фильтра

Отсчеты выделяемого избирательным цифровым фильтром сигнала $y(n)$ возводятся в квадрат и в течение времени NT_d накапливаются с помощью реализуемого в рекурсивной форме сглаживающего однородного фильтра. Выходной сигнал сглаживающего фильтра $s = (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} y^2(nT_d)$ на каждом N -м

такте сравнивается в пороговом устройстве ПУ с некоторым пороговым значением G , при превышении которого принимается решение о присутствии на входе устройства полезного гармонического сигнала. При этом длина импульсной характеристики сглаживающего фильтра должна выбираться из условия $NT_d = k T_0$, где T_0 – период обнаруживаемого или выделяемого сигнала, $k = 1, 2, \dots$ – целые числа. В этом случае значение сигнала на выходе сглаживающего фильтра **после установления переходных процессов в ЦФ** равно квадрату действующего значения входного синусоидального сигнала: $s = a^2/2$.

Полоса пропускания ЦФ соответствует частоте полезного сигнала, а полоса задерживания – частотам подавляемых помех.

Аналогичная структура устройства (без ПУ) используется при полосовом спектральном анализе случайных сигналов [36].

6.4.2. СГЛАЖИВАЮЩИЕ НЕРЕКУРСИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ НА ОСНОВЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Сглаживание на основе параболической аппроксимации входной последовательности осуществляют с помощью НФ, коэффициенты которых находят из условия минимума среднего квадрата ошибки методом наименьших квадратов [53]. Аппроксимация осуществляется, как правило, параболой 2-го порядка для каждой текущей группы или набора данных с числом точек (отсчетов сигнала) N , определяющим порядок НФ. Используемые значения $N = 5, 7, 9, 11$ ограничены возрастанием погрешности аппроксимации и инерционности фильтра с увеличением интервала аппроксимации NT_d и ростом объема вычислений. Каждому N -точечному входному набору данных

$x(n+k)$, $k = 0, \dots, \pm(N-1)/2$, нумеруемых относительно центрального элемента $x(n)$, ставится в процессе обработки аппроксимирующий его выходной набор данных $y(n+k)$, вычисляемый в соответствии с полиномом:

$$y(n+k) = y_0(n) + ky_1(n) + k^2y_2(n).$$

Искомые коэффициенты этого полинома $y_0(n)$, $y_1(n)$, $y_2(n)$ (зависящие от n) имеют следующий смысл: $y_0(n)$ – сглаженное значение или оценка входного набора $x(n+k)$ при $k=0$ ($\bar{x}(n)$), $y_1(n)$ – сглаженное значение или оценка его первой производной ($y_1(n) = dy(n+k)/dk|_{k=0} = \bar{x}'(n)$) и $y_2(n)$ – сглаженное значение или оценка его второй производной ($y_2(n) = d^2y(n+k)/dk^2|_{k=0} = \bar{x}''(n)$). Выражения, необходимые для вычисления этих оценок, получают-ся следующим образом:

записывается выражение для суммы квадратов ошибок аппроксимации:

$$\varepsilon(y_0, y_1, y_2) = \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \{x(n+k) - [y_0(n) + ky_1(n) + k^2y_2(n)]\}^2;$$

находятся и приравняются нулю частные производные ошибки по коэффициентам параболы $\partial\varepsilon/\partial y_0 = 0$, $\partial\varepsilon/\partial y_1 = 0$, $\partial\varepsilon/\partial y_2 = 0$, приводящие к системе из трех нормальных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} \sum_k [y_0(n) + ky_1(n) + k^2y_2(n)] &= \sum_k x(n+k); \\ \sum_k [ky_0(n) + k^2y_1(n) + k^3y_2(n)] &= \sum_k kx(n+k); \\ \sum_k [k^2y_0(n) + k^3y_1(n) + k^4y_2(n)] &= \sum_k k^2x(n+k); \end{aligned}$$

из решения системы линейных уравнений для конкретного значения N находятся выражения для оценок $y_0(n)$, $y_1(n)$, $y_2(n)$ в следующем виде:

$$y_0(n) = \sum_k b_{k(0)}x(n+k); \quad y_1(n) = \sum_k b_{k(1)}x(n+k); \quad y_2(n) = \sum_k b_{k(2)}x(n+k).$$

Данные выражения представляют разностные уравнения, коэффициентами которых $b_{k(0)}$, $b_{k(1)}$, $b_{k(2)}$ являются значения импульсных характеристик соответствующих нерекурсивных фильтров.

Например, для числа точек $N=5$ ($k = -2, -1, 0, 1, 2$) коэффициенты $b_{k(0)}$ имеют значения $(1/35)[-3, 12, 17, 12, -3]$, а соответствующий им сглаживающий НФ описывается разностным уравнением [53]:

$$y_0(n) = (1/35)[-3x(n-2) + 12x(n-1) + 17x(n) + 12x(n+1) - 3x(n+2)].$$

Оценкам производных сигнала $y_1(n)$, $y_2(n)$ в этом случае соответствуют коэффициенты сглаживающих НФ $b_{k(1)} = (1/10)[-2, -1, 0, 1, 3]$, $b_{k(2)} = (1/14)[2, -1, -2, -1, 2]$.

Таким образом, реализуемый с помощью НФ алгоритм сглаживания на основе параболической аппроксимации обеспечивает эффективную текущую оценку как самого сигнала, так и его первой и второй производных, т. е. скорости и ускорения. Такие фильтры применяются для обработки биомедицинских сигналов [53], а также результатов траекторных измерений в радиолокации, радионавигации наряду с адаптивной калмановской фильтрацией [27].

Более подробный анализ частотных, сглаживающих свойств и погрешностей таких фильтров можно найти в [36, 27].

6.4.3. СГЛАЖИВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ НЕЛИНЕЙНОГО МЕДИАННОГО ФИЛЬТРА

Недостатком линейных алгоритмов сглаживания является то, что они не сохраняют перепады фильтруемого процесса, несущие во многих случаях полезную информацию, например, R-зубцы электрокардиосигнала и др. Сглаживание перепадов позволяет уменьшить нелинейные ЦФ, в том числе медианные [59]. Они работают в соответствии с алгоритмом:

$$y(n) = \text{Медиана} \{ x(n - (L - 1)/2), \dots, x(n), \dots, x(n + (L - 1)/2) \},$$

где под медианой понимается средний член вариационного ряда, т. е. ряда или набора данных, упорядоченного по возрастанию его элементов. Число членов ряда L при этом должно быть нечетным.

$$\text{Например, } y(n) = \text{Медиана} \{ 0, 3, 4, 0, 7 \} = \text{Медиана} \{ 0, 0, 3, 4, 7 \} = 3.$$

Медианные цифровые фильтры используются при обработке изображений, биомедицинских, речевых [39] и других видов сигналов.

6. 5. РЕЖЕКЦИЯ ФИКСИРОВАННЫХ ЧАСТОТ С ПОМОЩЬЮ НЕРЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ

Режекцию фиксированных частот сигнала λ_{ci} можно осуществить с помощью НФ, нули которого, размещенные на единичной окружности, совпадают по частоте с подавляемыми составляющими сигнала: $\lambda_{0i} = \lambda_{ci}$.

Фильтру, подавляющему одну частоту λ_c , соответствует комплексно-сопряженная пара нулей $z_{01,2} = e^{\pm j\lambda_c} = \cos\lambda_c + j\sin\lambda_c$ и коэффициенты $b_0 = 1$; $b_1 = -2 \cos\lambda_c$; $b_2 = 1$. Передаточная функция и частотная характеристика такого заграждающего фильтра определяются выражениями:

$$H(z) = 1 - 2 \cos \lambda_c z^{-1} + z^{-2}; \quad H(j\lambda) = 1 - 2 \cos \lambda_c z^{-j\lambda} + z^{-2j\lambda}.$$

Рекомендуется самостоятельно получить выражение и исследовать АЧХ данного фильтра.

Для L фиксированных частот режекции коэффициенты НФ можно найти по заданным значениям нулей путем представления передаточной функции

$$\text{его в виде: } H(z) = \prod_{i=1}^L (1 - z_{oi} z^{-1}) = \prod_{i=1}^L (1 + b_{li} z^{-1} + z^{-2}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad ,$$

где $b_{li} = -2 \cos \lambda_c$. Фильтр можно реализовать по каскадной или прямой структуре.

Режекцию применяют для подавления сосредоточенных помех, например, сетевой помехи в медицинских приборах.

6. 6. СОГЛАСОВАННЫЕ (ОПТИМАЛЬНЫЕ) НЕРЕКУРСИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ

6.6 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА И ПРИМЕНЕНИЯ СОГЛАСОВАННЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Согласованные НФ (СФ) используются для обнаружения и оценки временного положения зашумленных периодических сигналов и сигналов конечной длительности $T_c = (N - 1)T_d$, обеспечивая максимальное отношение мощности сигнала к мощности шума в момент окончания сигнала или времени его наблюдения, а также сжатие сигнала по длительности. Применяются они также для полосового спектрального анализа сигналов (ПСА) и оценки их параметров. Выходной сигнал СФ соответствует автокорреляционной функции (АКФ) входного сигнала.

При обнаружении сигнала с помощью СФ (рис. 6.7) возведенное в квадрат значение модуля выходного сигнала фильтра $|y(N - 1)|^2$ в момент времени $(N - 1)T_d$, которое соответствует его пиковой мощности P_c , сравнивается в пороговом устройстве (ПУ) с некоторым порогом G , превышающим значение мощности выходного шума $P_{ш} = \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{N-1} |h(n)|^2$, где σ_x^2 - мощность входного шума, а $h(n)$ - импульсная характеристика СФ. Обычно $G \geq 1,5 P_{ш}$ [40]. При превышении порога G принимается решение о наличии сигнала, в противном случае - об его отсутствии.

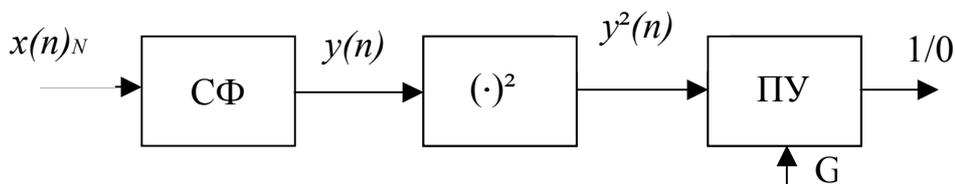


Рис. 6.7. Общая структура обнаружителя сигнала на основе СФ

Для сигнала конечной длительности $x(n)_N$ импульсная характеристика СФ определяется как $h(n)_N = x(N - 1 - n)$, а его частотная характеристика является комплексно сопряженной спектру входного сигнала: $H(j\omega) = X^*(j\omega)$. Спектр

выходного сигнала $Y(j\omega) = X(j\omega)X^*(j\omega) = |X(j\omega)|^2$ при этом является чисто вещественным, так как фазовый спектр его $\varphi_y(\omega)=0$. За счет компенсации (подкрутки) фаз составляющих сигнала они суммируются синфазно, образуя пик выходного сигнала. Наибольшее значение максимума отношения сигнал/шум имеют сложные сигналы с большой базой, т. е. произведением полосах длительность. Это ЛЧМ сигналы с квадратичной фазой, специальные кодовые видео и радио (фазоманипулированные) последовательности (М-последовательности, коды Баркера и др.).

6.6.2. НЕРЕКУРСИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ, СОГЛАСОВАННЫЕ С ГАРМОНИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ

С помощью СФ эффективно решаются важные для практики задачи обнаружения **гармонических сигналов** и оценки их параметров. Для гармонического сигнала $x(n) = a \sin(\lambda_0 n + \varphi) = a \cos \varphi \sin \lambda_0 n + a \sin \varphi \cos \lambda_0 n$ с известной начальной частотой $\lambda_0 = \omega_0 T_d$ и неизвестной начальной фазой φ импульсной характеристикой согласованного с ним фильтра является комплексная экспонента: $h(n)_N = e^{j\lambda_0(N-1-n)} = \cos \lambda_0(N-1-n) + j \sin \lambda_0(N-1-n)$. Она соответствует комплексному или квадратурному НФ, состоящему из двух согласованных вещественных фильтров $СФ_c$, $СФ_s$. Один из них с импульсной характеристикой $\cos \lambda_0(N-1-n)$ ($СФ_c$) согласован с косинусной составляющей сигнала, а другой с импульсной характеристикой $\sin \lambda_0(N-1-n)$ ($СФ_s$) – с синусной составляющей сигнала. Структура построенного на основе комплексного СФ обнаружителя приведена на рис. 6.8.

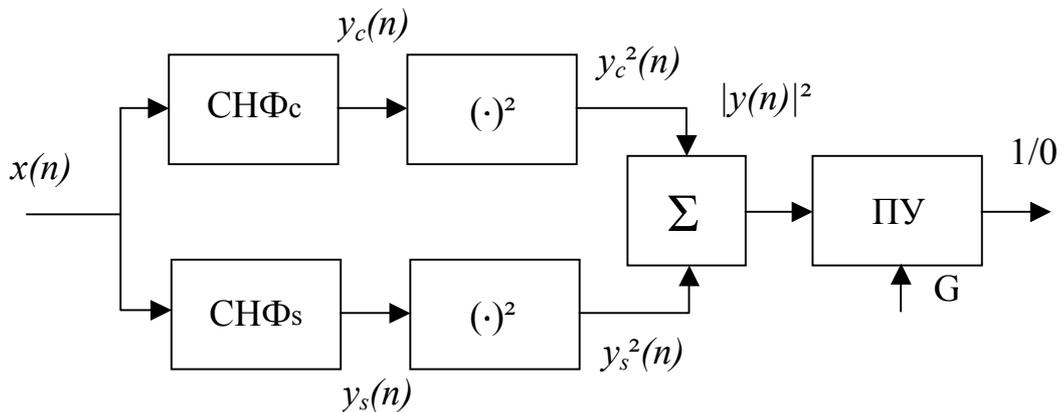


Рис. 6.8. Структурная схема обнаружителя гармонического сигнала на основе согласованного с ним комплексного нерекурсивного фильтра

Для изучения свойств такого обнаружителя и выбора длины импульсной характеристики СФ N , запишем выражение для выходного сигнала комплексного фильтра при воздействии на него гармонического сигнала

$x(n) = a \sin(\lambda n + \varphi) = (a/2j)(e^{j\lambda n} - e^{-j\lambda n})$ с частотой λ , в общем случае не равной частоте λ_o , с которой согласован фильтр:

$$y(n) = y_c(n) + jy_s(n) = \sum_{l=0}^n x(l) h(n-l) =$$

$$= \frac{a}{2j} e^{j\lambda_o(N-1-n)} \left[e^{j\varphi} \frac{1 - e^{j(\lambda - \lambda_o)(n+1)}}{1 - e^{j(\lambda - \lambda_o)}} - e^{-j\varphi} \frac{1 - e^{-j(\lambda + \lambda_o)(n+1)}}{1 - e^{-j(\lambda + \lambda_o)}} \right] \quad (6.2)$$

(при выводе использована формула суммы конечного числа членов геометрической прогрессии).

Рассмотрим случай $\lambda = \lambda_o$. При $n = N - 1$ выражение для выходного сигнала фильтра приводится к виду:

$$y(N-1) = \frac{a}{2j} \left[e^{j\varphi} N - e^{-j\varphi} \frac{1 - e^{-j2\lambda_o N}}{1 - e^{-j2\lambda_o}} \right].$$

При произвольном значении длины импульсной характеристики N квадрат модуля выходного сигнала СФ будет зависеть от неизвестной фазы сигнала φ . Эта зависимость устраняется при выборе N из условия: $2\lambda_o N = 2k\pi$, где $k = 1, 2, \dots, N-1$. При этом условии $y(N-1) = (a/2j) e^{j\varphi} N = (a/2j) N(\cos\varphi + j\sin\varphi)$, $|y(N-1)|^2 = y_c^2(N-1) + y_s^2(N-1) = (a^2/2)N^2$ и, следовательно, возможно обнаружение сигнала с помощью порогового устройства ПУ. Значения частот f_o , с которыми может быть согласован фильтр, определяются соотношением: $f_o = k f_d / 2N$. С увеличением N возрастает мощность полезной составляющей сигнала.

Ограничение на возможные значения центральных частот НФ, согласованного с гармоническим сигналом, и длины импульсной характеристики (времени обнаружения сигнала) снимаются в случае **комплексного входного гармонического сигнала**: $x(n) = a e^{j(\lambda n + \varphi)}$. По аналогии с (6.2) получаются следующие выражения для выходного сигнала комплексного СФ и квадрата его модуля при $n = N - 1$:

$$y(N-1) = a e^{j\varphi} \frac{1 - e^{j(\lambda - \lambda_o)N}}{1 - e^{j(\lambda - \lambda_o)}} ; \quad |y(N-1)|^2 = a^2 \left| \frac{1 - e^{j(\lambda - \lambda_o)N}}{1 - e^{j(\lambda - \lambda_o)}} \right|^2.$$

Квадрат модуля не зависит от начальной фазы при любом значении частоты сигнала λ , а обнаружение сигнала с частотой $\lambda = \lambda_o$ возможно при любых значениях частоты λ_o и длины импульсной характеристики N : $|y(N-1)|^2 = a^2 N^2$.

Зависимость

$$A(\lambda, \lambda_o) = |y(N-1)| / a = \left| \frac{1 - e^{j(\lambda - \lambda_o)N}}{1 - e^{j(\lambda - \lambda_o)}} \right| = \left| \frac{\sin(\lambda - \lambda_o)N / 2}{\sin(\lambda - \lambda_o) / 2} \right|$$

называется АЧХ обнаружителя, согласованного с частотой λ_o . Она соответствует частотной характеристике прямоугольной весовой функции, смещенной по частоте на λ_o . С помощью параметра N можно управлять положением нулей АЧХ, обеспечивая таким образом наряду с выделением полезного гармонического сигнала с частотой λ_o (или близкой к ней) подавление гармонических помех за пределами полосы пропускания фильтра. Значение N определяет также время наблюдения сигнала и эффективность подавления белого шума.

Преимущества согласованной фильтрации комплексных гармонических сигналов могут быть в полной мере реализованы и в случае вещественного гармонического сигнала, если использовать преобразователь Гильберта, преобразующий вещественный сигнал в комплексный. Структура обнаружителя в этом случае принимает вид рис. 6.9 [40].

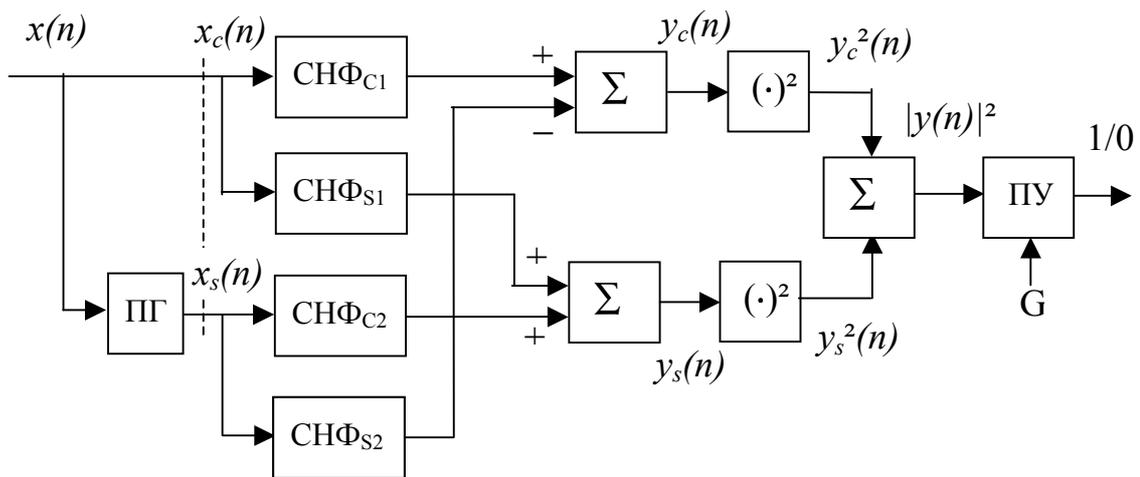


Рис. 6.9. Структурная схема обнаружителя комплексного гармонического сигнала или вещественного сигнала с преобразователем Гильберта

При этом входной и выходной сигналы преобразователя Гильберта (ПГ) соответствуют косинусной $x_c(n)$ и синусной $x_s(n)$ составляющим в случае обработки комплексного входного сигнала, рассмотренной выше. Преобразователь Гильберта также реализуется на основе НФ (см. п. 3.3.5).

Квадратурные обнаружители позволяют оценивать амплитуду и фазу сигнала, с которым согласован обнаружитель при условии, что амплитуды помех достаточно малы.

6.6.3. ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ
КОМПЛЕКСНЫХ НЕРЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ,
СОГЛАСОВАННЫХ С ГАРМОНИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ

Комплексные НФ, согласованные с гармоническим сигналом, описываются передаточной функцией $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(N-1-n)\lambda o} z^{-n}$ и могут быть реализованы в соответствии с алгоритмом ДВС:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{j\lambda o(N-1-n-m)} = \\ = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \cos \lambda o(N-1-n-m) + j \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sin \lambda o(N-1-n-m).$$

Так как при обнаружении и оценке параметров сигналов используются лишь значения выходных отсчетов фильтра $y_c(N-1)$ и $y_s(N-1)$, то отпадает необходимость сохранения предыдущих отсчетов входного сигнала $x(n-m)$. В результате алгоритм обработки фильтра преобразуется к виду:

$$y_c(N-1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \lambda o(N-1-n), \quad y_s(N-1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin \lambda o(N-1-n).$$

Он включает $2N$ операций умножения и накопления сумм произведений со сбросом накапливающего сумматора перед обработкой очередной реализации сигнала.

Возможен еще более простой способ **рекурсивной реализации** комплексного НФ, согласованного с гармоническим сигналом, вытекающий из следующего представления его передаточной функции:

$$H(z) = e^{j\lambda o(N-1)} \frac{1 - e^{-j\lambda o N} z^{-N}}{1 - e^{-j\lambda o} z^{-1}}.$$

С учетом того, что используются только $(N-1)$ -е отсчеты сигналов $y_c(n)$ и $y_s(N)$, слагаемое $e^{-j\lambda o N} z^{-N}$ в данном выражении может быть опущено, также как и фазовый множитель $e^{j\lambda o(N-1)}$, что соответствует упрощенному выражению передаточной функции

$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{-j\lambda o} z^{-1}} = \frac{1 - \cos \lambda o z^{-1} - j \sin \lambda o z^{-1}}{1 - 2 \cos \lambda o z^{-1} + z^{-2}}.$$

Реализующее ее рекурсивное звено 2-го порядка (рис. 6.10) описывается разностными уравнениями:

$$w(n) = x(n) + 2 \cos \lambda o w(n-1) - w(n-2); \\ y_c(n) = w(n) - \cos \lambda o w(n-1); \\ y_s(n) = -\sin \lambda o w(n-1).$$

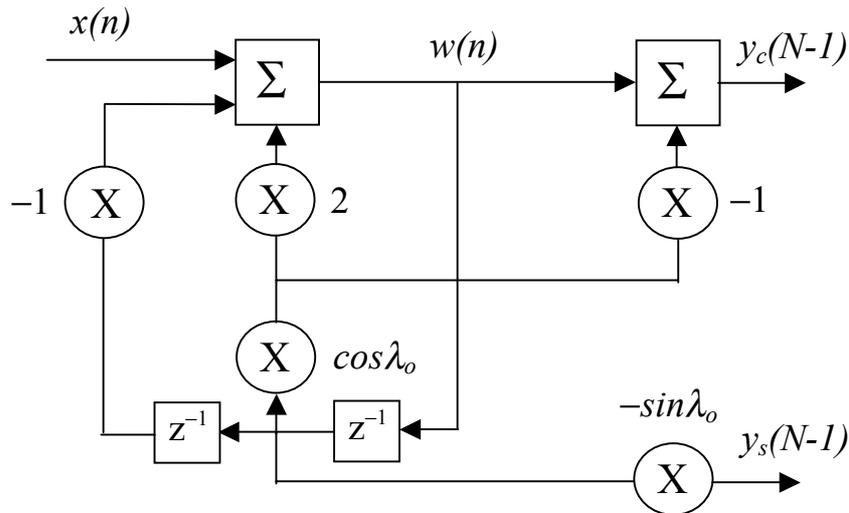


Рис. 6.10. Структурная схема рекурсивной реализации комплексного нерекурсивного фильтра

В данном способе реализации комплексного НФ, согласованного с гармоническим сигналом, необходимо выполнить N нетривиальных операций умножения на коэффициент $\cos \lambda_0$ и одну дополнительную операцию на $(N-1)$ -м такте на коэффициент $-\sin \lambda_0$.

С помощью данной схемы можно также отдельно обрабатывать как вещественный сигнал, так и косинусную и синусную составляющие комплексного входного сигнала в структуре обнаружителя рис. 6.9.

6.6.4. НЕРЕКУРСИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ, СОГЛАСОВАННЫЕ С КОМПЛЕКСНОЙ ОГИБАЮЩЕЙ РАДИОСИГНАЛОВ

В системах обработки радиосигналов вида $a(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)]$ (рис. 6.11) используются НЦФ, согласованные с их комплексной огибающей $A_k(t) = A(t)e^{j\theta(t)} = A(t)\cos\theta(t) + jA(t)\sin\theta(t)$, которая содержит в себе всю информацию, обусловленную как амплитудной $A(t)$, так и угловой $\theta(t)$ модуляцией сигнала. Цифровой обработке таких сигналов предшествует выделение с помощью квадратурного фазового детектора (умножителей и ФНЧ) реальной и мнимой составляющих огибающей и их приведения (преобразования) к цифровой форме: $A_k(nT_D) = A(nT_D)e^{j\theta(nT_D)} = A(nT_D)\cos\theta(nT_D) + jA(nT_D)\sin\theta(nT_D)$.

Элементы, подключенные к выходам согласованных фильтров, образуют квадратурный амплитудный и фазовый демодуляторы огибающей узкополосного радиосигнала.

Импульсная характеристика НЦФ, согласованного с комплексной огибающей радиосигнала, определяется как $h_k(n) = A(N-1-n) e^{-j\theta(N-1-n)}$.

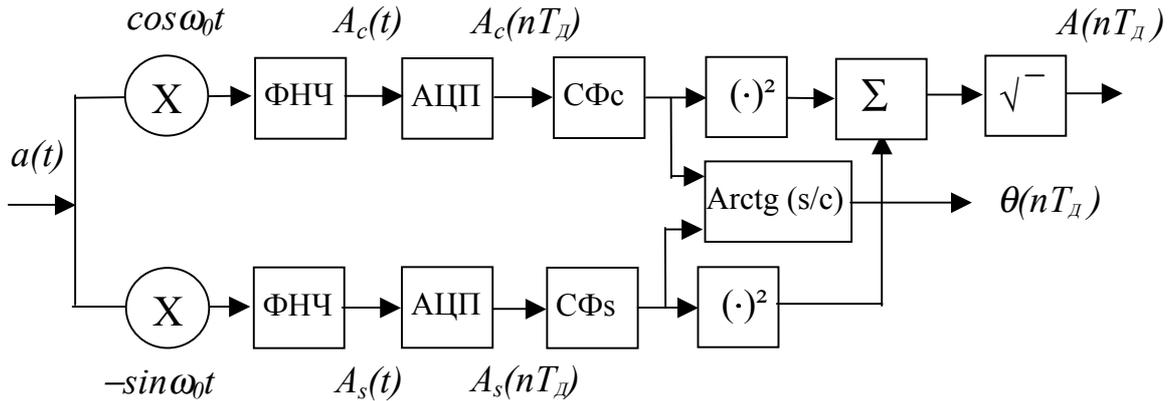


Рис. 6.11. Структурная схема оптимальной обработки узкополосного радиосигнала

В качестве примера рассмотрим цифровую согласованную фильтрацию широко используемого в радиотехнике ЛЧМ-радиоимпульса $a(t) = a \cos(\omega_0 t + \beta t^2/2)$, где $\beta = 2\Delta\omega/T_c$ – скорость модуляции, $2\Delta\omega$ – девиация частоты, T_c – длительность радиоимпульса. Сигнал характеризуется также индексом модуляции $m = \Delta\omega T_c / \pi$. Огибающая сигнала в цифровой форме определяется как $A_k(nT_d) = a e^{j\beta(nT_d)^2/2}$, а импульсная характеристика согласованного с ней НФ, соответственно, как

$$h_k(n) = e^{j\beta(N-1-n)^2 T_d^2 / 2} = e^{j\pi m(N-1-n)^2 / N^2},$$

где $N = T_c/T_d$ – число обрабатываемых отсчетов огибающей сигнала. Согласованная цифровая фильтрация приводит к сжатию ЛЧМ-импульса в m раз при одновременном увеличении его пикового значения в \sqrt{m} раз. Увеличивая длительность и уменьшая амплитуду сигнала, можно получить то же соотношение сигнал/шум на выходе СФ и улучшить таким образом энергетику канала [1, 2].

Нерекурсивный фильтр, согласованный с комплексной огибающей ЛЧМ-сигнала, может быть реализован различными способами, рассмотренными в данном учебном пособии и в [15, 57, 60].

6.7. ПРОСТЫЕ АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ СИГНАЛОВ

С помощью нерекурсивных фильтров реализуются простые алгоритмы приближенного цифрового дифференцирования сигналов, используемые, например, в радиолокации (селекция движущихся целей) [27], электрокардиографии (выделение R-зубцов) [53,61] и других областях.

Двухточечный алгоритм дифференцирования описывается уравнением вида $y(n) = (1/T_d)[x(n) - x(n-1)]$ и реализуется в соответствии со структурной схемой НФ рис. 6.12, а.

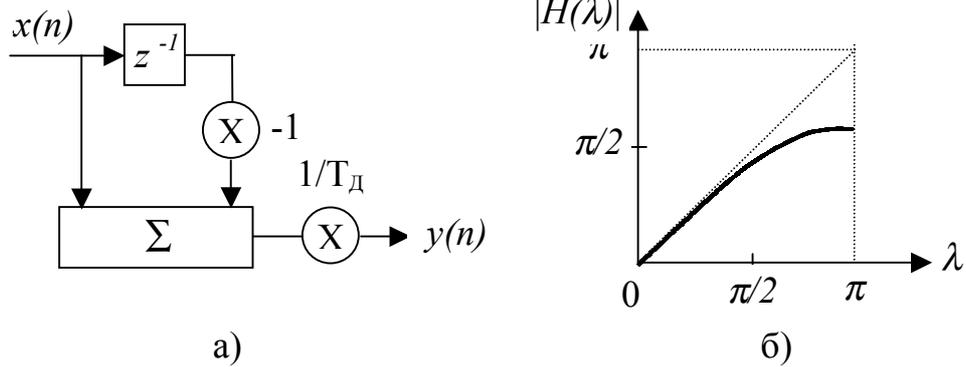


Рис. 6.12. Структурная схема (а) и АЧХ (б) двухточечного дифференцирующего нерекурсивного фильтра

Ему отвечают передаточная функция $H(z) = (1/T_d)(1 - z^{-1})$ с нулем в точке $z_0 = 1$, АЧХ $|H(j\lambda)| = (2/T_d)\sin\lambda/2$ (рис. 6.12, б) и ФЧХ $\varphi(\lambda) = (\pi/2) - (\lambda/2)$.

АЧХ фильтра практически линейна, т. е. близка к АЧХ идеального дифференциатора до значений $\lambda \approx \pi/4$ или $f_d/8$.

Данный алгоритм наряду с сигналом усиливает также высокочастотные шумы и помехи, которые могут присутствовать на входе фильтра.

Трехточечный алгоритм дифференцирования описывается уравнением вида $y(n) = (1/2T_d)[x(n) - x(n - 2)]$ и реализуется в соответствии со структурной схемой НФ рис. 6.13, а.

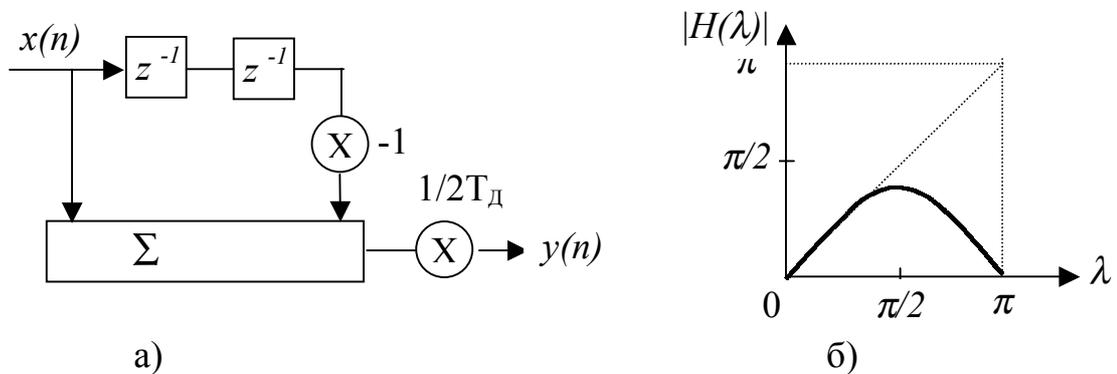


Рис. 6.13. Структурная схема (а) и АЧХ (б) трехточечного дифференцирующего нерекурсивного фильтра

Ему отвечают передаточная функция $H(z) = (1/2T_d)(1 - z^{-2})$ с нулями в точках $z_{0,1,2} = \pm 1$, АЧХ $|H(j\lambda)| = (1/T_d)\sin\lambda$ (рис. 6.13, б) и ФЧХ $\varphi(\lambda) = (\pi/2) - \lambda$.

АЧХ фильтра практически линейна, т. е. близка к АЧХ идеального дифференциатора до значений $\lambda \approx \pi/6$ или $f_d/12$.

В отличие от предыдущего, данный алгоритм подавляет возможные высокочастотные шумы и помехи на входе фильтра.

Алгоритм дифференцирования на основе полиномиальной аппроксимации по конечному набору данных, как показано в п. 6.5.4, позволяет получить сглаженные оценки первой и высших производных сигнала.

Например, в случае параболической 5-точечной аппроксимации дифференцирование осуществляется в соответствии с разностным уравнением:

$$y_1(n) = (1/10)\{2[x(n+2) - x(n-2)] + [x(n+1)] - x(n-1)\},$$

которому отвечают передаточная функция, АЧХ и ФЧХ НФ:

$$H(z) = (1/10)[2 + z^{-1} - z^{-3} - 2z^{-4}], |H(j\lambda)| = (2/10)(\sin\lambda + 2\sin 2\lambda), \varphi(\lambda) = (\pi/2) - 2\lambda.$$

Предлагается самостоятельно проанализировать АЧХ данного фильтра.

С увеличением порядка фильтра (при $N = 7, 9, 11$) улучшаются точность аппроксимации производной и подавление высокочастотных шумов и помех.

6. 8. ПРОСТЫЕ АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИГНАЛОВ

С помощью цифровых фильтров реализуются простые алгоритмы приближенного цифрового интегрирования сигналов, такие как алгоритм прямоугольников, трапеций и Симпсона.

Алгоритм прямоугольников определяется разностным уравнением

$$y(n) = T_d x(n-1) + y(n-1),$$

реализуемым рекурсивным ЦФ первого порядка (рис. 6.14, а).

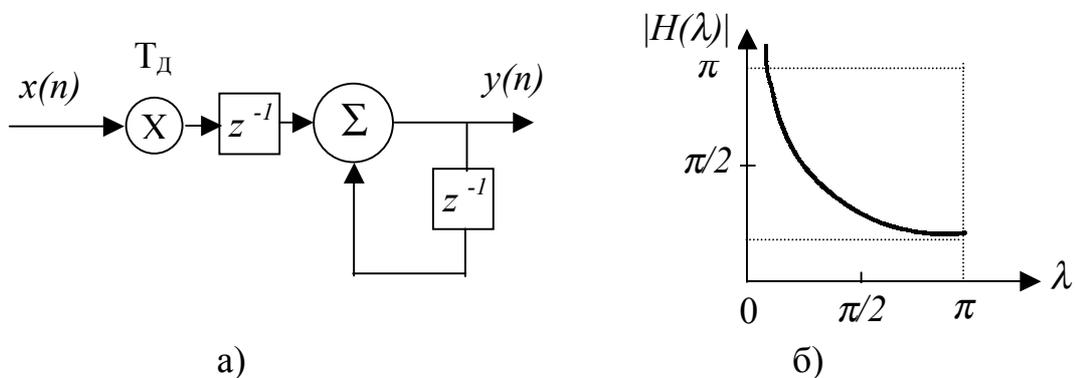


Рис. 6.14. Структурная схема (а) и АЧХ (б) рекурсивного фильтра, интегрирующего по алгоритму прямоугольников

Он описывается передаточной функцией, АЧХ и ФЧХ вида:

$$H(z) = T_d z^{-1} / (1 - z^{-1}), |H(j\lambda)| = T_d / 2 \sin \lambda / 2 \text{ (рис. 6.14, б), } \varphi(\lambda) = -(\pi/2) - (\lambda/2).$$

Фильтр имеет один нуль $z_0 = 0$ в начале координат и полюс $z_p = 1$ на единичной окружности. Фильтр потенциально неустойчив, что проявляется в нарастании со временем погрешности интегрирования.

Более точное интегрирование обеспечивает **алгоритм трапеций**, определяемый разностным уравнением

$$y(n) = T_d x(n-1) + y(n-1) + (T_d / 2)[x(n) - x(n-1)],$$

реализуемым рекурсивным ЦФ первого порядка (рис. 6.15, а).

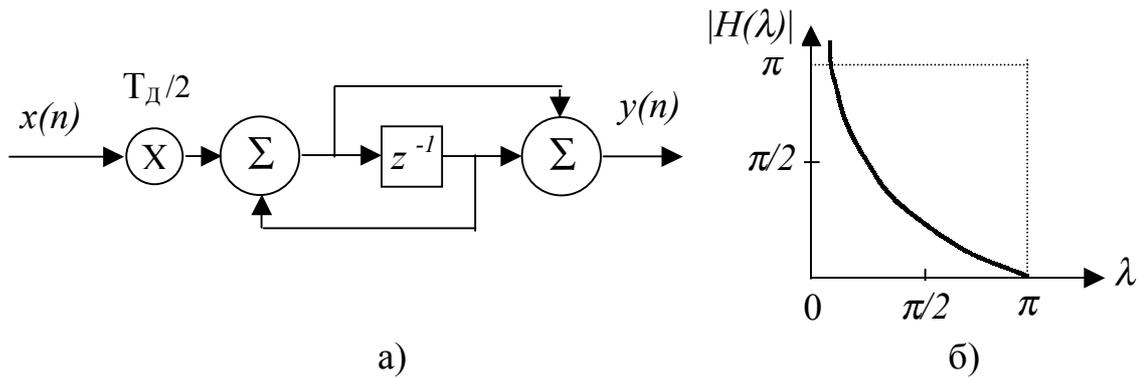


Рис. 6.15. Структурная схема (а) и АЧХ (б) рекурсивного фильтра, интегрирующего по правилу трапеций

Он описывается передаточной функцией, АЧХ и ФЧХ вида:

$H(z) = (T_d/2)(1+z^{-1})/(1-z^{-1})$, $|H(j\lambda)| = (T_d/2)ctg\lambda/2$ (рис. 6.15, б), $\varphi(\lambda) = -(\pi/2)$. Фильтр имеет один нуль в точке $z_0 = -1$ и полюс $z_p = 1$ на единичной окружности. АЧХ фильтра достаточно близка к АЧХ идеального интегратора ($1/\lambda$) на частотах менее $\lambda \approx \pi/2$ или $f_d/4$. Вследствие потенциальной неустойчивости фильтра также со временем происходит нарастание погрешности интегрирования.

Цифровое интегрирование **по правилу Симпсона** выполняется в соответствии с разностным уравнением

$$y(n) = y(n-2) + (T_d/3)[x(n) + 4x(n-1) + x(n-2)],$$

реализуемым РФ второго порядка (рис. 6.16, а).

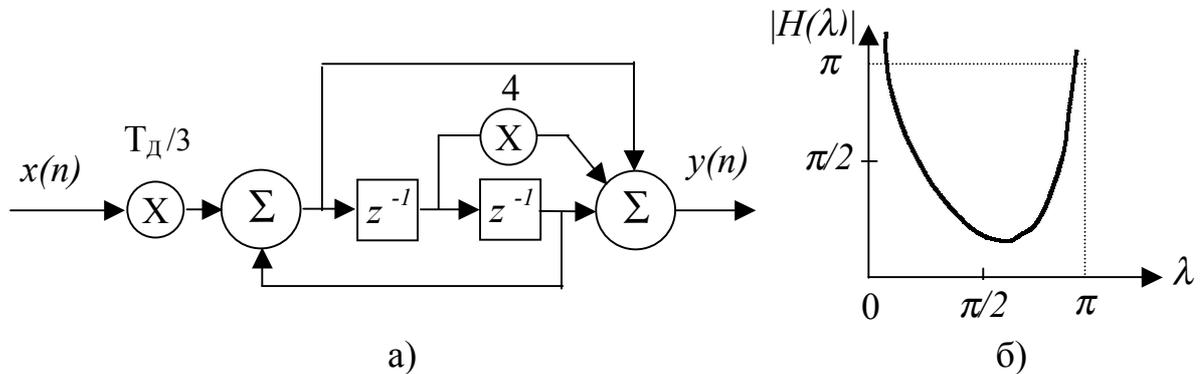


Рис. 6.16. Структурная схема (а) и АЧХ (б) рекурсивного фильтра, интегрирующего по правилу Симпсона

Он описывается передаточной функцией, АЧХ и ФЧХ вида:

$$H(z) = (T_d/3)(1+4z^{-1}+z^{-2})/(1-z^{-2}), \quad |H(j\lambda)| = (T_d/3)(2+\cos\lambda)/\sin\lambda \text{ (рис. 6.16, б),}$$

$\varphi(\lambda) = -(\pi/2)$. Фильтр имеет пару нулей $z_{01} = -0,27$, $z_{02} = -3,73$ и полюсов $z_{p1,2} = \pm 1$ на единичной окружности. Следствием потенциальной неустойчивости данного фильтра, как и выше рассмотренных, является ограниченное время непрерывного интегрирования и необходимость периодического при-

ведения его в исходное состояние, т. е. сброса. АЧХ фильтра достаточно близка к АЧХ идеального интегратора ($1/\lambda$) на частотах не выше $\lambda \approx \pi/2$ или $f_d/4$. Однако такой интегратор усиливает высокочастотные шумы. Поэтому интегрирование зашумленных сигналов лучше выполнять по правилу трапеций.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем различие общей и специальной задач цифровой фильтрации?
2. Каковы возможные способы перестройки РФ и НФ?
3. Какой вид имеют частотные характеристики АК и ФК?
4. Как связаны между собой передаточные функции ЦФ разного вида?
5. Как получается передаточная функция комплексного ЦФ?
6. В чем отличие частотных характеристик комплексных ЦФ?
7. Зависит ли работа синус-косинусного генератора от способа ограничения разрядности произведений (с усечением или округлением)?
8. Какими критериями определяется эффективность сглаживающих ЦФ?
9. Как изменяется АЧХ и импульсная характеристика рекурсивного сглаживающего фильтра при изменении коэффициента μ ?
10. Каковы основные свойства однородного сглаживающего НФ и сглаживающих НФ на основе других весовых функций?
11. Как влияет некрatность времени усреднения и периода гармонического сигнала в схеме обнаружения и оценки параметров сигналов рис. 6. 6?
12. Как находятся коэффициенты сглаживающих НФ на основе параболической аппроксимации?
13. Какой вид имеют частотные характеристики НФ, осуществляющих режекцию фиксированных частот сигнала?
14. Какой вид имеют отклики медианного и однородного фильтров одинаковой длины на перепад входного сигнала?
15. Как определяется импульсная характеристика согласованного НФ для различных сигналов?
16. Как определяется импульсная характеристика и параметры НФ, согласованного с гармоническим сигналом?
17. Каковы преимущества согласованной фильтрации комплексных гармонических сигналов?
18. Каковы особенности реализации комплексных согласованных НФ, используемых для обнаружения и оценки параметров гармонических сигналов?
19. Как осуществляется согласованная фильтрация и оценка параметров огибающей радиосигналов?
20. Какие условия учитываются при выборе алгоритмов цифрового дифференцирования и интегрирования сигналов?
21. Какова причина нарастания со временем погрешности цифрового интегрирования сигналов?

ЗАДАЧИ ПО ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

1. Задан аналоговый сигнал типа прямоугольный импульс конечной длительности, равной 2000 мкс. Найти зависимость погрешности дискретизации сигнала от частоты дискретизации f_d . Показать спектры аналогового и дискретного сигналов.

2. Задан аналоговый прямоугольный радиоимпульс конечной длительности, равной 100 мкс, с частотой заполнения 100 кГц. Выбрать частоту дискретизации f_d из условия восстановления сигнала по его спектру с заданной точностью. Показать спектры аналогового и дискретного сигналов.

3. Задан аналоговый прямоугольный радиоимпульс длительностью 1 мс и частотой заполнения 20 кГц. Выбрать частоту дискретизации f_d из условия оценки амплитуды и фазы заполнения по его спектру с заданной точностью.

4. Задан аналоговый сигнал в виде последовательности прямоугольных импульсов длительностью 100 мкс и скважностью 2. Выбрать частоту дискретизации сигнала, необходимую и достаточную для оценки амплитуды и фазы основной гармоники сигнала с заданной точностью.

5. Задан сигнал с балансной амплитудной модуляцией, несущая частота сигнала 10 кГц, частота модуляции 100 Гц. Выбрать частоту дискретизации сигнала из условия оценки амплитуды и фазы модулирующего сигнала по его спектру с заданной точностью.

6. Задан аналоговый радиоимпульсный сигнал с прямоугольной огибающей, частотой заполнения 10 кГц, длительностью 1 мс, скважностью 10. Показать условия выбора частоты дискретизации и возможности оценки амплитуды и фазы заполнения сигнала.

7. Гармонический сигнал с частотой 50 Гц проходит через двухполупериодный выпрямитель. Выбрать минимальную частоту дискретизации, обеспечивающую точное измерение постоянной составляющей сигнала. Рассмотреть варианты дискретизации сигнала до и после дискретизации.

8. Дискретный случайный сигнал с полосой частот, не превышающей 4 кГц, подвергается операции возведения в квадрат и последующей фильтрации НЦФ с прямоугольной импульсной характеристикой (вычисление кратковременной энергии сигнала). Обосновать выбор частоты дискретизации сигнала, записать алгоритм обработки и частотную характеристику фильтра.

9. Через интегрирующую RC-цепь с постоянной времени 0,4 мс на вход АЦП поступает однократный прямоугольный импульс длительностью 1 мс. Необходимо показать, как влияет наличие RC-цепи на выбор частоты дискретизации сигнала и возникающие при этом искажения.

10. Найти погрешность квантования постоянного напряжения $U = 100$ мВ, вносимую АЦП разрядностью 8 бит и шкалой $\pm 5,12$ В. Показать, каким образом можно уменьшить эту погрешность путем наложения шума,

имеющего СКЗ $\sigma_{\text{ш}} < (1/3)Q$, и последующего усреднения (Q – шаг квантования по уровню).

11. Оценить предельное и среднеквадратичное значения погрешности квантования АЦП, имеющего разрядность 10 бит и динамический диапазон преобразуемых сигналов $\pm 5,12$ В. Найти отношение сигнал-шум на выходе АЦП при обработке случайных сигналов. Определить шум квантования АЦП на выходе идеального цифрового ФНЧ с частотой среза 500 Гц при частоте дискретизации сигнала $f_d = 8$ кГц.

12. Привести статистические и спектральные характеристики шума квантования АЦП разрядностью 8 бит и динамическим диапазоном преобразуемых сигналов $\pm 5,12$ В. Найти максимальное отношение уровней сигнала и шума квантования на выходе АЦП при преобразовании нормального случайного сигнала. Оценить шум квантования АЦП на выходе нерекурсивного фильтра с прямоугольной импульсной характеристикой длиной $N = 10$.

13. На вход АЦП поступает гармонический сигнал с амплитудой $U_m = \sqrt{2}$ В, частотой 1 кГц, и шум, имеющий СКЗ $\sigma_{\text{ш}} = 100$ мкВ и равномерную спектральную плотность в полосе 100 кГц; частота дискретизации 25 кГц. Найти спектральную плотность шума и отношение С/Ш на входе и выходе цифрового полосового фильтра с центральной частотой $f_0 = 1$ кГц и полосой пропускания 500 Гц. Показать спектр сигнала и шума на выходе фильтра и входе-выходе АЦП. Найти мощность шума квантования АЦП на выходе фильтра при разрядности АЦП 8 бит.

14. Оценить искажения, возникающие при преобразовании гармонического сигнала из цифровой формы в аналоговую с помощью ЦАП, если частота дискретизации равна 8 кГц, а частота сигнала изменяется в пределах $(0,1 - 1)$ кГц. Каким образом можно уменьшить эти искажения? Определить требования к аналоговому ФНЧ на выходе ЦАП.

15. Синтезировать РЦФ типа ФНЧ по аналоговому RC-прототипу первого порядка с постоянной времени 1 мс на основе дифференциального уравнения цепи. Частота дискретизации 8 кГц. Сравнить их частотные характеристики.

16. Синтезировать РЦФ типа ФНЧ по аналоговому RC-прототипу первого порядка с постоянной времени 10 мс путем дискретизации импульсной характеристики цепи с частотой дискретизации 4 кГц. Сравнить их частотные характеристики.

17. Синтезировать РЦФ типа ФНЧ по аналоговому RC-прототипу первого порядка с постоянной времени 2 мс с помощью билинейного преобразования; частота дискретизации равна 5 кГц. Сравнить их частотные характеристики.

18. Синтезировать НЦФ типа ФНЧ по аналоговому RC-прототипу первого порядка с постоянной времени 4 мс путем дискретизации и усечения импульсной характеристики. Сравнить частотные характеристики аналогового и цифрового фильтров; частота дискретизации равна 8 кГц.

19. Синтезировать НЦФ типа ФНЧ по аналоговому РС-прототипу первого порядка с постоянной времени 8 мс путем дискретизации его частотной характеристики. Сравнить их частотные характеристики. Частота дискретизации равна 8 кГц.

20. Синтезировать РЦФ типа ФВЧ по аналоговому РС-прототипу первого порядка с постоянной времени 100 мс на основе дифференциального уравнения цепи. Сравнить их частотные характеристики. Частота дискретизации равна 1 кГц.

21. Синтезировать РЦФ типа ФВЧ по аналоговому РС-прототипу первого порядка с постоянной времени 50 мс путем дискретизации импульсной характеристики цепи. Частота дискретизации равна 2 кГц. Сравнить частотные характеристики фильтров.

22. Синтезировать РЦФ типа ФВЧ по аналоговому РС-прототипу первого порядка с постоянной времени 20 мс с помощью билинейного преобразования. Сравнить их частотные характеристики. Частота дискретизации 4 кГц.

23. Синтезировать НЦФ типа ФВЧ по аналоговому РС-прототипу первого порядка с постоянной времени 10 мс путем дискретизации и усечения импульсной характеристики. Сравнить их частотные характеристики. Частота дискретизации равна 8 кГц.

24. Синтезировать НЦФ типа ФВЧ по аналоговому РС-прототипу первого порядка с постоянной времени 25 мс путем дискретизации его частотной характеристики. Сравнить их частотные характеристики. Частота дискретизации равна 10 кГц.

25. Синтезировать РЦФ типа ФНЧ по нормализованному аналоговому ФНЧ-прототипу, имеющему пару комплексно-сопряженных полюсов, равных $-0,1 \pm j0,5$. Записать передаточные функции аналогового и цифрового фильтров, качественно определить вид их АЧХ.

26. Найти коэффициенты и передаточную функцию РЦФ типа ФВЧ, соответствующего аналоговому ФНЧ-прототипу, имеющему один вещественный полюс, равный $-0,2$. Определить импульсные характеристики обоих фильтров.

27. Синтезировать цифровой рекурсивный фильтр 2-го порядка, имеющий резонансную частоту 1 кГц, коэффициент передачи $K_0=10$. Частота дискретизации 10 кГц.

28. Синтезировать методом весовых функций НЦФ типа ФНЧ с частотой среза 100 Гц, частотой задерживания 200 Гц, частотой дискретизации 8 кГц, допустимым затуханием в полосе задерживания -40 дБ, неравномерностью в полосе пропускания не более 0,2 дБ.

29. Синтезировать методом весовых функции НЦФ типа ФВЧ с частотой среза 200 Гц, частотой задерживания 100 Гц, частотой дискретизации 2 кГц, допустимым затуханием в полосе задерживания -40 дБ, неравномерностью в полосе пропускания не более 0,5 дБ.

30. Синтезировать методом частотной выборки НЦФ типа ФНЧ с частотой среза 200 Гц, частотой задерживания 300 Гц, частотой дискретизации 2 кГц, допустимым затуханием в полосе задерживания -40 дБ, неравномерностью в полосе пропускания не более 0,5 дБ.

31. Синтезировать методом частотной выборки НЦФ типа ФВЧ с частотой среза 200 Гц, частотой задерживания 300 Гц, частотой дискретизации 2000 Гц, затуханием в полосе задерживания не менее 40 дБ и неравномерностью в полосе пропускания не более 0,5 дБ.

32. Синтезировать полосовой НЦФ с центральной частотой 500 Гц и частотами задерживания 400 и 600 Гц. Частота дискретизации 4000 Гц, затухание в полосе задерживания не менее 40 дБ.

33. Синтезировать двухполосный НЦФ с центральными частотами 200 и 400 Гц и частотами задерживания, отстоящими на ± 100 Гц. Частота дискретизации 4000 Гц, затухание в полосе задерживания > 40 дБ.

34. Для цифрового рекурсивного фильтра-резонатора 2-го порядка с коэффициентами $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $a_1 = -1,3$, $a_2 = 0,81$ найти резонансную частоту f_0 и коэффициент передачи K_0 на частоте f_0 . Частота дискретизации 4 кГц.

35. Для звена РФ 2-го порядка прямой формы реализации с коэффициентами $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $a_1 = -1,8$, $a_2 = 0,81$ с помощью разностного уравнения найти отклик фильтра на единичный импульс, единичный скачок и прямоугольный импульс длительностью 5 отсчетов. Вывести аналитическое выражение для импульсной характеристики фильтра. Показать, как аналитически находится отклик фильтра на произвольное входное воздействие.

36. Для звена РФ 2-го порядка канонической формы реализации с коэффициентами $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0,64$ определить отклики на единичный импульс и единичный скачок. Найти аналитическое выражение для импульсной характеристики. Показать, как аналитически определить отклик на прямоугольный импульс длительностью $N = 5$.

37. Для звена РФ 2-го порядка с коэффициентами $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = -1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0,81$ найти значения нулей и полюсов его передаточной функции и по картине нулей и полюсов определить вид АЧХ фильтра. Записать аналитическое выражение для АЧХ.

38. По заданным значениям нулей $z_{01} = z_{02} = 1$ и полюсов $z_{p1,2} = -0,8 \pm j0,4$ РФ найти его коэффициенты, передаточную функцию и частотную характеристику.

39. По заданным значениям нулей $z_{01} = 1$, $z_{02} = -1$ и полюсов $z_{p1,2} = 0,5 \pm j0,8$ РФ найти его коэффициенты, передаточную функцию и частотную характеристику.

40. Найти импульсную характеристику РЦФ 1-го порядка с вещественным полюсом $z_p = 0,9$, а также его частотную характеристику и разностное

уравнение. Показать, почему при значении полюса $Z_p = 1,1$ фильтр будет неустойчив и исследовать его поведение во времени.

41. Найти импульсную, частотную характеристику и разностное уравнение РЦФ 1-го порядка с комплексным полюсом Z_p , модуль которого $|Z_p| = 0,9$, а аргумент (частота полюса) $\lambda_p = \pi/6$. Привести структурную схему, реализующую такой фильтр для случаев обработки вещественного и комплексного сигналов.

42. По заданным коэффициентам звена РФ 1-го порядка $b_0 = 1/\mu$, $a_1 = -(\mu - 1) / \mu$ найти его импульсную и частотную характеристики для значений $\mu = 10, 50$, а также отклики на сигнал типа единичный скачок.

43. Найти аналитическое выражение для импульсной характеристики идеализированного цифрового ФВЧ с частотой среза 1 кГц при частоте дискретизации 10 кГц. Показать вид этой импульсной характеристики. Как реализовать НЦФ с частотной характеристикой, близкой к идеальной?

44. Найти аналитическое выражение для импульсной характеристики идеализированного цифрового ППФ с частотами среза $f_{c1} = 1$ кГц, $f_{c2} = 2$ кГц при частоте дискретизации 20 кГц. Показать ее вид и возможность реализации НЦФ с частотной характеристикой, близкой к идеальной.

45. Найти аналитическое выражение для импульсной характеристики идеализированного цифрового заграждающего фильтра с частотами среза $f_{c1} = 1$ кГц, $f_{c2} = 2$ кГц при частоте дискретизации 20 кГц. Показать ее вид и возможность реализации НЦФ с частотной характеристикой, близкой к идеальной.

46. Задан идеальный дифференциатор с частотной характеристикой $H(j\omega) = j\omega/(\omega_d/2)$, частотой среза $f_c = 400$ Гц и частотой дискретизации 1 кГц. Найти его импульсную характеристику. Показать, каким образом можно реализовать такой дифференциатор на основе НЦФ с частотной характеристикой, близкой к заданной.

47. Задан идеальный преобразователь Гильберта с частотной характеристикой $H(j\omega) = j/(\omega_d/2)$ при $0 \leq \omega \leq \omega_c$ и $H(j\omega) = -j/(\omega_d/2)$ при $-\omega_c \leq \omega \leq 0$. Частота среза $f_c = 500$ Гц, частота дискретизации $f_d = 1$ кГц. Найти его импульсную характеристику, показать возможность реализации в виде НЦФ.

48. Задан идеальный интегратор с частотной характеристикой $H(j\omega) = (\omega_d/2) / j\omega$ в полосе частот $\pm((\omega_d/16) - (\omega_d/2))$. Найти его импульсную характеристику. показать возможность реализации в виде НЦФ.

49. Найти частотную характеристику и коэффициенты гребенчатого НЦФ, имеющего 12 нулей, равномерно размещенных на единичной окружности.

50. Определить частотную характеристику НФ с прямоугольной импульсной характеристикой длиной $N_p = 5$ и треугольной импульсной харак-

теристикой длиной $N_T = 2N_P - 1$. Показать структурную схему НФ и вид его АЧХ и ФЧХ.

51. Рассчитать импульсную характеристику НЦФ 16-го порядка ($N = 16$), заданного своей дискретизированной ЧХ с ненулевыми выборками $H(j0) = 1$, $H(j1) = 1$ и линейной ФЧХ. Привести возможные варианты его реализации.

52. Реализовать НФ с прямоугольной импульсной характеристикой длиной $N_P = 5$ и треугольной импульсной характеристикой длиной $N_T = 2N_P - 1$ на основе частотной выборки. Найти коэффициенты и привести структурную схему фильтра.

53. Реализовать НФ 10-го порядка с ненулевыми выборками частотной характеристики: $H(3) = 0,5$, $H(4) = 1,0$, $H(5) = 0,5$. Найти коэффициенты фильтра и привести его структурную схему.

54. Реализовать НФ с импульсной характеристикой $h(0) = 0,5$, $h(1) = 1$, $h(2) = 1$, $h(3) = 0,5$ на основе ДПФ при длительности обрабатываемого сигнала $N_1 = 8$. Найти коэффициенты фильтра, привести его структурную схему и алгоритм обработки.

55. Показать структурные схемы НФ, согласованных с прямоугольным импульсом длительностью $N_P = 8$ и треугольным импульсом длительностью $N_T = 2N_P - 1$. Найти отклики фильтров на соответствующий сигнал и их частотные характеристики.

56. Вычислить линейную свертку двух прямоугольных дискретных последовательностей длиной $N_1 = 5$, $N_2 = 8$ во временной и частотной области, привести графическую иллюстрацию.

57. Реализовать НФ на основе ДПФ с ненулевыми коэффициентами $H(0) = 1$, $H(1) = 0,5$. Привести структурную схему фильтра и его отклик на прямоугольный импульс длительностью $N_1 = 5$. Длина импульсной характеристики $N_2 = 8$.

58. Реализовать НФ на основе ДВС с импульсной характеристикой, соответствующей весовой функции Хэмминга длиной $N = 9$. Найти коэффициенты фильтра и его частотную характеристику.

59. Преобразовать НФ с прямоугольной импульсной характеристикой длиной $N = 20$ в полосовой фильтр с центральной частотой $\lambda_0 = 0,1\pi$. Привести аналитические выражения и графики частотных и импульсных характеристик фильтра.

60. Преобразовать НФ с прямоугольной импульсной характеристикой длиной $N = 8$ в фильтр верхних частот. Привести аналитические выражения и графики для частотной и импульсной характеристик фильтра.

61. Составить шумовую эквивалентную схему звена РФ 2-го порядка с коэффициентами $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = -1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0,81$ для прямой формы реализации. Разрядности входного сигнала 8 бит, произведений 16 бит, коэффициентов 10 бит. Показать форматы чисел. Найти предельные и средне-

квадратичные значения источников шума квантования и шума квантования на выходе фильтра.

62. Составить шумовую эквивалентную схему звена РФ 2-го порядка с коэффициентами $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $a_1 = -1,8$, $a_2 = 0,81$ для канонической формы реализации. Разрядности входного сигнала 8 бит, произведений 16 бит, коэффициентов 12 бит. Показать форматы чисел. Найти предельные и среднеквадратичные значения источников шума квантования и шума квантования на выходе фильтра.

63. Найти предельное и среднеквадратичное значения шума квантования на выходе НЦФ на основе ДВС с коэффициентами 0,125, 0,25, 0,25, 0,125. Разрядности входного сигнала и произведений 10 бит. При какой разрядности произведений собственные шумы квантования фильтра отсутствуют?

64. Рассчитать значение масштабного множителя для звена РФ с коэффициентами $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = -1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0,81$, реализуемого в прямой форме.

65. Рассчитать значение масштабного множителя для звена РФ с коэффициентами $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $a_1 = -1,8$, $a_2 = 0,81$, реализуемого в канонической форме.

66. Рассчитать значения масштабных множителей для НФ на основе ДВС с треугольной импульсной характеристикой длиной $N = 10$.

67. На исследуемый объект с частотной характеристикой, ограниченной полосой (0 – 100) кГц, поступает полигармонический сигнал из 100 компонент с равными амплитудами. Найти минимальную частоту дискретизации, необходимую для измерения частотной характеристики объекта по его отклику ($f_d < 100$ кГц), а также длину считываемой реализации.

68. Для аналоговой RC-цепи с постоянной времени 10 мс показать, при каком разрешении по частоте возможно восстановление (интерполяция) с заданной точностью частотной характеристики цепи по ее измеренным частотным выборкам и каким образом.

69. На рекурсивный ЦФ типа ФНЧ подан дискретный прямоугольный импульс длительностью $N = 10$ ($T_{\text{и}} = 10T_{\text{д}}$). Показать в общем виде, а также с помощью графических построений, как по отклику фильтра на этот сигнал найти его импульсную и частотную характеристики. Какие погрешности при этом возникают? Формой отклика задаться самостоятельно.

70. На рекурсивный ЦФ типа ФНЧ подана дискретная последовательность прямоугольных импульсов длительностью $\tau_{\text{и}} = 100$ мкс, периодом повторения 10 мс и частотой дискретизации 100 кГц. Показать в общем виде, а также с помощью графических построений, как по отклику фильтра на этот сигнал найти его импульсную и частотную характеристики. Как оценить погрешности этих оценок? Формой отклика задаться самостоятельно.

71. На НЦФ подается дискретный сигнал типа прямоугольной импульс длительностью $N_{\text{и}} = 10$. Как по отклику фильтра определить его частотную и импульсную характеристики? Какова точность этих оценок? Формой отклика задаться самостоятельно.

72. На НЦФ подается дискретный сигнал в виде периодической последовательности прямоугольных импульсов длительностью 100 мкс, периодом 10 мс, периодом дискретизации 10 мкс. Как по отклику фильтра найти его импульсную и частотную характеристики? При каких параметрах фильтра эти оценки будут точными? Формой отклика задаться самостоятельно.

73. На вход АЦП с частотой дискретизации 20 кГц поступает гармонический сигнал с частотой 27 кГц. Показать сигнал на выходе АЦП и его спектр. Как с помощью ДПФ по спектру сигнала оценить неизвестное значение частоты путем изменения частоты дискретизации?

74. На вход АЦП поступает гармонический сигнал с частотой 1,5 кГц, частота дискретизации АЦП 100 кГц. Показать, каким образом можно оценить частоту и амплитуду сигнала с помощью ДПФ по числу точек $N = 100$. Пояснить графически. Что изменится, если взять $N = 200$?

75. Покажите, как с помощью ДПФ найти априорно неизвестное значение частоты гармонического сигнала путем выбора значения N . Исходные данные: $f = 1,1$ кГц, $f_{\text{д}} = 10$ кГц.

76. Найти случайную погрешность оценки амплитуды гармонического сигнала с помощью ДПФ, если частота сигнала $f = 1$ кГц, $f_{\text{д}} = 20$ кГц, СКЗ шума на входе АЦП $\sigma_{\text{ш}} = 1$ мВ, полоса шума 40 кГц. Как зависит погрешность от числа выборок сигнала N , по которому вычисляется ДПФ?

77. Найти погрешность оценки амплитуды первой, третьей и пятой гармоник меандра, действующего на входе АЦП, с помощью ДПФ; частота сигнала 1 кГц, частоты дискретизации 12 кГц, 11 кГц. Влиянием гармоник меандра выше 9-ой пренебречь.

78. Найти частоту дискретизации для оценки с помощью ДПФ амплитуд 1-й, 3-й, 5-й гармоник огибающей радиоимпульсного сигнала скважностью 2, несущей частотой 50 кГц, частотой модуляции 1 кГц; влиянием гармоник огибающей свыше 9-ой пренебречь. Погрешность оценок не более 1-го процента.

79. Задана реализация гармонического сигнала конечной длины $N = 20$; частота сигнала $f = 1$ кГц, $f_{\text{д}} = 16$ кГц, начальная фаза равна 0. Найти ДПФ. Выполнить интерполяцию сигнала и спектра до $N' = 2N$. Рассчитать интерполированные значения сигнала и спектра.

80. Найти погрешность оценки амплитуды и фазы гармонического сигнала с помощью ДПФ за счет шума квантования АЦП. Частота сигнала $f = 1$ кГц, $f_{\text{д}} = 8$ кГц, разрядность АЦП 8 бит. Предложить способы уменьшения погрешности, не связанные с увеличением разрядности АЦП (с помощью усреднения).

В соответствии с приведенным в учебном пособии алгоритмическим обеспечением создан поддерживающий его комплекс программ цифровой обработки сигналов. Он включает программу синтеза рекурсивных фильтров по аналоговому прототипу, программы синтеза нерекурсивных фильтров методами весовых функций и частотной выборки, программу структурного моделирования систем ЦОС и программу реализации цифровых фильтров на основе аппаратно-программных средств аналого-цифрового интерфейса типа АРМЭКС [50, 51].

Программы синтеза наряду с задачей аппроксимации осуществляют также масштабирование цифровых фильтров, оценку точности и моделирование их при различного рода тестовых воздействиях.

Программа структурного моделирования позволяет с помощью графического редактора создавать любые структуры сложных систем ЦОС из набора базовых элементов (например, систем многоканального полосового анализа и синтеза сигналов, формирования и разделения групповых сигналов и др.) и анализировать преобразования воздействующих на них сигналов во временной и частотной области в различных точках системы. Она позволяет оценить зависимость качества системы от параметров ее элементов, а также изучить преобразования сигналов в сложных системах ЦОС.

Программа реализации цифровых фильтров представляет возможность экспериментально исследовать их динамические и частотные свойства, в том числе зависимость частотных характеристик от значения частоты дискретизации.

Все программы имеют встроенное методическое обеспечение, необходимое для работы с ними. На основе их создан расчетно-лабораторный практикум по цифровой обработке сигналов [46], включающий курсовое проектирование и лабораторные исследования, выполняемые по единому техническому заданию.

Более подробно с рабочей программой дисциплины “Цифровая обработка сигналов” и ее программно-методическим комплексом можно ознакомиться в Internet по адресу:

http://www.rtf.kgtu.runnet.ru/KAFEDRI/Radiotex/cos_web/index.htm.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гоноровский И. С., Демин М. П. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. пособие. М.: Радио и связь, 1994.
2. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986.
3. Цыкин И. А. Дискретно-аналоговая обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1986.

4. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: В 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1983.
5. Игнатъев Н. К. Дискретизация и ее приложения. М.: Связь, 1980.
6. Побережский Е. С. Цифровые радиоприемные устройства. М.: Радио и связь, 1986.
7. Интегральные микросхемы: Микросхемы для аналого-цифрового преобразования и средств мультимедиа. Вып. 1. М.: ДОДЭКА, 1996.
8. Федорков Б. Г., Телец В. А., Дегтяренко В. П. Микроэлектронные цифроаналоговые и аналого-цифровые преобразователи. М.: Советское радио, 1986.
9. Гнатек Ю. Р. Справочник по цифроаналоговым и аналого-цифровым преобразователям. М.: Радио и связь, 1982.
10. Найденов А. И. Трансформация спектра наносекундных импульсов. М.: Советское радио, 1973.
11. Гольденберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник. М.: Радио и связь, 1985.
12. Цифровые фильтры в электросвязи и радиотехнике / Под ред. Л. М. Гольденберга. М.: Радио и связь, 1986.
13. Кисель В. А. Аналоговые и цифровые корректоры. М.: Радио и связь, 1986.
14. Оппенгейм А. В., Шафер Р. В. Цифровая обработка сигналов. М.: Связь, 1979.
15. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Пер. с англ. М.: Мир, 1979.
16. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971.
17. Антонию А. Цифровые фильтры: анализ и проектирование. М.: Радио и связь, 1983.
18. Пелед А., Лиу Б. Цифровая обработка сигналов. Киев: Вища школа, 1979.
19. Введение в цифровую фильтрацию сигналов / Под ред. Р. Богнера, А. Константиnidиса. М.: Мир, 1976.
20. Каппелини В., Константиnidис А., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение. М.: Энергоатомиздат, 1983.
21. Синтез рекурсивных цифровых фильтров методом билинейного преобразования / Сост. А. С. Глинченко; КрПИ. Красноярск, 1987.
22. Расчет нерекурсивных цифровых фильтров / Сост. А. С. Глинченко, О. А. Тронин; КрПИ. Красноярск, 1986.
23. Исследование и синтез рекурсивных цифровых фильтров с помощью моделирования на ЭВМ / Сост. А. С. Глинченко; КрПИ. Красноярск, 1987.
24. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1986.

25. Глинченко А. С. Цифровая обработка сигналов: Учеб. пособие / КрПИ. Красноярск, 1989.
26. Лэм Г. Аналоговые и цифровые фильтры. Расчет и реализация. М.: Мир, 1982.
27. Справочник по устройствам цифровой обработки информации / Под ред. В. Н. Яковлева. Киев: Техника, 1988.
28. Справочник по теоретическим основам радиоэлектроники. В 3-х т. Т. 2 / Под ред. Б. Х. Кривицкого. М.: Энергия, 1977.
29. Зааль Р. Справочник по расчету фильтров. М.: Радио и связь, 1983.
30. Ханзел Г. Справочник по расчету фильтров. М.: Советское радио, 1974.
31. Херреро Д., Уиллонер Г. Синтез фильтров. М.: Советское радио, 1971.
32. Христиан Э., Эйзенман Е. Таблицы и графики по расчету фильтров: Справочник. М.: Связь, 1975.
33. Сборник задач и упражнений по курсу "Радиоприемные устройства" / Под общей ред. В. И. Сифорова. М.: Радио и связь, 1984.
34. Хэмминг Р. В. Цифровые фильтры. М.: Недра, 1987.
35. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. М.: Мир, 1982.
36. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: В 2-х т. Т. 2. М.: Мир, 1983.
37. Цифровые радиоприемные системы / Под ред. М. И. Жодзишского. М.: Радио и связь, 1990.
38. Шкритек П. Справочное руководство по звуковой схемотехнике. М.: Мир, 1991.
39. Рабинер Л., Шафер Р. Цифровая обработка речевых сигналов / Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1981.
40. Гольденберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов: Учеб. пособие. М.: Высшая школа, 1990.
41. Гелль П. Как превратить персональный компьютер в измерительный комплекс. М.: ДМК, 1999.
42. Глинченко А. С. Методы синтеза и измерения параметров гармонических сигналов в режиме когерентной выборки // Спутниковые системы связи и навигации. Т. 3. Красноярск: Изд-во КГТУ, 1997.
43. Глинченко А. С. Методы синтеза и когерентного ввода полигармонических измерительных сигналов // Спутниковые системы связи и навигации. Т. 3. Красноярск: Изд-во КГТУ, 1997.
44. Никамин В. А. Форматы цифровой звукозаписи. СПб.: Элби, 1998.
45. Чмых М. К. Цифровая фазометрия. М.: Радио и связь, 1993.
46. Глинченко А. С. Цифровая обработка сигналов: Расчетно-лабораторный практикум / КГТУ. Красноярск, 1996.
47. Глинченко А. С. Методы и средства аппаратно-программной реализации цифровых фильтров: Учеб. пособие / КрПИ. Красноярск, 1992.

48. Цифровые процессоры обработки сигналов: Справочник / Под ред. А. Г. Остапенко. М.: Радио и связь, 1994.
49. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов / Пер.с англ. М.: Радио и связь, 1989.
50. Глинченко А. С., Моисеенко В. В. Аппаратно-программный комплекс для реализации и лабораторного исследования систем с цифровой обработкой сигналов / Учеб. пособие. Красноярск: КГТУ, 1998.
51. Инструментальный модуль для реализации и лабораторного исследования систем контроля и управления на базе персональных компьютеров IBM PC / Сост. А. С. Глинченко, Р. М. Пугачев; КГТУ. Красноярск, 1998.
52. Рекурсивные фильтры на микропроцессорах / Под ред. А. Г. Остапенко. М.: Радио и связь, 1988.
53. Микрокомпьютерные медицинские системы: Проектирование и применения / Под ред. У. Томпкинса, Дж. Уэбстера. М.: Мир, 1983.
54. Петровский А. А. Методы и микропроцессорные средства обработки широкополосных и быстропротекающих процессов в реальном времени. Минск: Наука и техника, 1988.
55. Ланнэ А. А. Оптимальный синтез линейных электрических схем. М.: Связь, 1978.
56. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов. М.: Советское радио, 1973.
57. Применение цифровой обработки сигналов / Под ред. Э. Оппенгейма. М.: Мир, 1980.
58. Марпл С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
59. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений / Под ред. Т. С. Хуанга. М.: Радио и связь, 1984.
60. Кузьмин С. З. Основы проектирования систем цифровой обработки радиолокационной информации. М.: Радио и связь, 1986.
61. Кардиомониторы. Аппаратура непрерывного контроля ЭКГ: Учеб. пособие / Под ред. А. Л. Барановского. М.: Радио и связь, 1993.

ВВЕДЕНИЕ	3
1. СИГНАЛЫ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ	5
1.1. Общая структура системы цифровой обработки аналоговых сигналов	5
1.2. Математические модели дискретных сигналов	6
1.3. Спектр дискретного сигнала	8
1.4. Связь между спектрами дискретного и аналогового сигналов. Явление наложения спектров	9
1.5. Определение и оценка методической погрешности, вызываемой дискретизацией сигнала по времени	15
1.6. Практические особенности дискретизации сигнала	16
1.7. Условия выбора частоты дискретизации	18
1.8. Квантование сигналов по уровню	23
1.9. Цифровое кодирование сигнала	26
1.10. Условия выбора разрядности АЦП	27
1.11. Инструментальные погрешности преобразования аналог – код	29
1.12. Условие математической адекватности дискретного и цифрового сигналов	31
1.13. Преобразование сигнала из цифровой формы в аналоговую	31
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	35
2. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ НА ОСНОВЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ И ДИСКРЕТНОЙ ВРЕМЕННОЙ СВЕРТКИ	36
2.1. Определение и классификация дискретных систем	36
2.2. Методы математического описания линейных дискретных систем во временной области и алгоритмы цифровой филь- трации на их основе	37
2.3. Методы математического описания сигналов дискретных сис- тем на комплексной плоскости (в частотной области)	40
2.4. Тестовые последовательности дискретных систем	43
2.5. Передаточная функция и частотная характеристика дискрет- ной системы	48
2.6. Передаточные функции рекурсивных цифровых фильтров	52
2.7. Частотные характеристики рекурсивных фильтров	57
2.8. Формы реализации рекурсивных фильтров	59
2.9. Прямая форма реализации нерекурсивных фильтров	66
2.10. Передаточная функция и частотная характеристика нерекур- сивного фильтра	67
2.11. Нерекурсивные фильтры с линейной фазочастотной характе- ристикой	68

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	70
3. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ПО ЗАДАННОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ (ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ)	71
3.1. Задачи и методы синтеза цифровых фильтров	71
3.2. Синтез рекурсивных фильтров по аналоговому прототипу. Метод билинейного преобразования	73
3.3. Синтез нерекурсивных фильтров методом весовых функций	84
3.4. Синтез нерекурсивных фильтров методом частотной выборки	95
3.5. Численные методы синтеза цифровых фильтров	101
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	102
4. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ И ОБЕСПЕЧЕНИЯ ТОЧНОСТИ ЦОС	103
4.1. Задачи ЦОС, связанные с конечной разрядностью чисел	103
4.2. Влияние квантования коэффициентов фильтра	105
4.3. Масштабирование сигналов в цифровых фильтрах	105
4.4. Расчет масштабных множителей для конкретных структур цифровых фильтров	108
4.5. Оценка шумов квантования и требуемой разрядности АЦП и регистров фильтра	111
4.6. Предельные циклы или колебания в рекурсивных фильтрах	119
4.7. Методика решения задач конечной разрядности чисел в цифровых фильтрах	119
4.8. Роль ЭВМ при решении задач оценки и обеспечения точности ЦОС	121
4.9. Способы решения задач оценки и обеспечения точности ЦФ с помощью моделирования на ЭВМ	121
4.10. Общая граф-схема программного моделирования ЦФ	123
4.11. Граф-схема алгоритма моделирования каскадно реализуемого РФ для прямой формы реализации звеньев	124
4.12. Граф-схема алгоритма моделирования каскадно реализуемого РФ при канонической форме реализации звеньев	126
4.13. Граф-схема алгоритма моделирования нерекурсивного цифрового фильтра на основе ДВС	127
4.14. Примеры решения задач конечной разрядности чисел	130
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	133
5. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ С КОНЕЧНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ	134
5.1. Определение дискретного преобразования Фурье	134
5.2. Свойства ДПФ	138
5.3. Алгоритм цифровой фильтрации конечных последовательностей на основе ДПФ	139
5.4. Фильтрация последовательностей большой длины с помощью алгоритма на основе ДПФ (секционирование свертки)	142

5.5. Программная реализация цифровых фильтров на основе ДПФ	144
5.6. Алгоритм цифровой фильтрации на основе частотной выборки.....	148
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	159
6. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И ПРИМЕНЕНИЯ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ.....	161
6.1. Общая и специальные задачи цифровой фильтрации	161
6.2. Перестраиваемые цифровые фильтры, амплитудные и фазо- вые корректоры	161
6.3. Комплексные цифровые фильтры	164
6.4. Сглаживающие цифровые фильтры	167
6.5. Режекция фиксированных частот с помощью нерекурсивных фильтров.....	173
6.6. Согласованные (оптимальные) нерекурсивные фильтры.....	174
6.7. Простые алгоритмы цифрового дифференцирования сигналов... ..	180
6.8. Простые алгоритмы цифрового интегрирования сигналов	182
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	184
ЗАДАЧИ ПО ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ	185
ПРИЛОЖЕНИЕ	193
ЛИТЕРАТУРА	193